第66回　日数教全国大会（岡山）研究発表資料

関数領域における
授業研究と評価問題

東京都中数研　関数委員会

1　研究の経過とねらい

関数の領域の指導のねらいは、事象の中から伴って変化する2つの数量関係を見つけ、さらにその数量関係を一般化し，他の事象の考察や処理に利用する能力を養うことであろう。都中数研関数委員会では、昭和52年7月の中学校学習指導要領改訂の告示にさきがけ、多くの現場の教師の意見を取り入れながら、上記のねらいに即した「関数」指導計画を立案してきた。

第1学年…大幅な変動のあった導入部分
第2学年…一次関数の導入部分、さらにひととおりの指導の後、具体的な事象から関数関係にある2つの数量を見い出して問題解決をはかる部分
第3学年…従来と扱いが変った「2乗に比例する関数」,「いろいろな事象と関数」,「集合と関数」の部分

以上の内容に研究のスポットをあて、改訂の主旨にそって順次学年を追い、実践的な指導計画及び指導案を作成し、授業研究を通して具体的な「関数」指導の検討を重ねてきた。

その際、一貫して基礎的・基本的な知識の習得や、技能の習熟を図るとともに、関数的な見方・考え方の育成に配慮し、生徒の発達段階に応じた、具体的な関数教材の開発に努めてきた。

なお、これまでの研究内容については、その都度都中数研研究発表大会、日数教関ブロ大会(東京・千葉)、日数教全国大会(東京、山形)において発表してきた。本年度は、

① 授業研究を通して、各学年の指導のねらいを明確にした指導計画及び指導案を検討・改訂すること
② これまで検討してきた評価問題をさらに生徒にとっての学習到達目標がとらえやすくなるよう工夫すること

を本研究のねらいとした。

2 研究の内容

I 授業研究と指導案の改訂

52年度以降作成、実践してきた指導案を、授業研究を通してよりよいものに改訂しようとした。その際、授業時における生徒の反応や指導の流れ、さらに評価問題の実施結果(後述)を考慮したことはいうまでもない。

第2学年

(1) 指導計画 　　　　　　　　　　　　　18 時間

項目	指導内容	用語	時数
一次関数の意味	○ 対応する変量をみいだす ○ 変量間の法則の把握 ○ 一次関数の意味	一次関数	②
一次関数とグラフ	○ 一次関数と比例との関係 ○ 一次関数のグラフと比例のグラフとの関係 ○ $y=ax+b$ の b の意味とグラフの切片	切片 (bだけ平行移動) (変域)	2
一次関数の性質	○ 変化の割合とグラフでの傾き ○ 傾きと切片を知ってグラフに表す ○ 一次関数のグラフの性質	変化の割合 傾き 直線の式	3
一次関数を求める	○ 与えられた条件から一次関数を求める (1) 変化の割合と対応する1組の(x, y)の値から (2) 2組の(x, y)から (3) 測定などの具体的な資料から		2
一次関数の利用	○ 法則や規則性をみいだす ○ 一次関数を利用して問題を解決する		②
問題練習			1
二元一次方程式のグラフ	○ 二元一次方程式 $ax+by=c$ のグラフと一次関数 $y=ax+b$ との関係 ○ 二元一次方程式のグラフ	方程式のグラフ	2
連立二元一次方程式をグラフを用いての解法	○ 連立二元一次方程式の解とグラフでの交点の意味 ○ 連立二元一次方程式をグラフを用いて解く		2
問題練習			2

(2) 指導展開例

題目　一次関数の利用（2時間）

第10時

本時のねらい　　関数の考え方を用い、法則や規則性をみいだし　問題を解決する。

学　習　活　動	留　意　点
① 第2時の時間が余ったときの課題を復習しながら、一次関数の意味を確認させる。 ○ 式で表し、どう考えたか発表させる。 ○ 表や式の形から、一次関数であることを再確認する。	○ OHPを活用 ○ 課題をプリントして各生徒に配布する ○ 変化の割合が一定であることに気づかせる

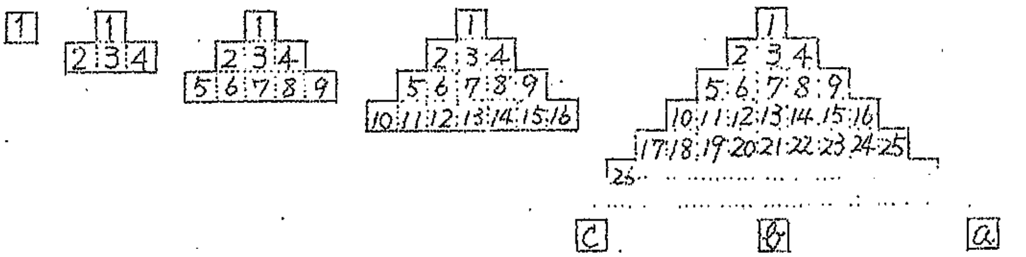
x	1	2	3	4	5 ……
y	4	10	16	22	28 ……

$$y = 6x - 2$$

② 依存関係を表などからみいだし、関数関係としてとらえる。

課題

第2時の課題の正方形に、下図のように自然数 1、2、3、4、…… をつぎつぎと書き入れていきました。



学　習　活　動	留　意　点
○ 5段目に書き入れた数の個数は何個あるか調べる ○ 10段目の数の個数は何個あるか ● 求め方を話し合う ○ 段と個数との依存関係を整理確認する	○ 自由に考えさせ、各自の解法を発表させていく。

段	1	2	3	4	5 …… 10
個数	1	3	5	7	9 ……

③ 帰納的な考えで得られた事実を、演えき的に検証させる。

○ 20段、30段と並べても、能率よく求められる方法を考える

○ こんな式が考えられるという仮説を各自の解法でたてさせ、式を一般化させる

○ n段目に対応して、個数はどんな式で表されるか

段	1	2	3	4	5……	10…………	n
個数	1	3	5	7	9………	19…………	$2n-1$

○ x段目の数の個数をy個としたとき、yはxのどんな式になるか

○ 4段目の個数を $y=2x-1$ に代入して 関係式の正しいことを確認する

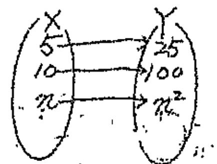
○ 5段目の右端にくる数字は、どんな数がくるか調べる。

○ 10段目の右端にくる数字$\boxed{a}$は、どんな数がくるか

● 求め方を話し合う

○ 10段目の次にn段目を扱う

段	1	2	3	4	5………	10
数	1	4	9	16	25………	



$y=x^2$

○ x段目に対応する右端の数をyとしたとき、yはxのどんな式になるか

○ $y=x^2$ に $x=4$ を代入して関係式の正しいことを確認する

○ 検証の重要さにふれる

④ 本時のまとめ

○ $y=6x-2$　$y=2x-1$　$y=x^2$ のように、関数関係を表す式はいろいろあり、関数の考えがたいせつであることをまとめる

○ 関数の考え
- 集合
- 変数
- 変域
- 順序
- 対応

⑤ 発展的に考えさせる

○ すすんだ生徒に考えさせる

○ 10段目の左端の数$\boxed{C}$は、どんな数がくるか

○ 10段目の中央の数$\boxed{b}$には、どんな数がくるか

○ n段目に対応する$\boxed{C}$と$\boxed{b}$は、nのどんな式で表されるか

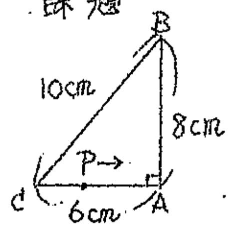
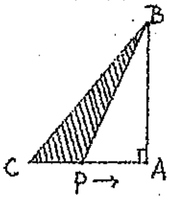
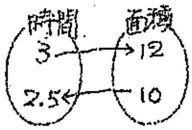
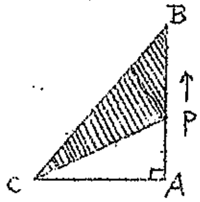
○ n段まで扱わなくてもよい

$C=n^2-2(n-1)$

$b=n^2-(n-1)$

第11時

本時のねらい　　復習を兼ねながら、事実問題から、一次関数を表す式を求めたり、それを利用して問題を解いたりすることができるようにする。

学習活動	留意点
① 題意を把握し、関数関係をとりだす	○ OHPを利用する
課題  図のように△BCA（∠A＝∠R）があって、点PはCを出発し、毎秒1cmの速さでAを通ってBまで動くという。	
○ 関数関係がなりたつと思う2つの量をとりださせる	
② 一次関数を表す式を求めたり、それを利用して問題を解決する	
○ 1秒後、2秒後、3秒後の△BCPの面積を求める	○ 暗算でもよい
 時間 | 1　2　3…… 面積 | 4　8　12……	○ 連続量であることにふれる
○ 点PがCA上にあるとき、Cを出発してx秒後の△BCPの面積をy cm²として、x，yの　とりうる範囲を考えさせる $0 \leqq x \leqq 6$　　$0 \leqq y \leqq 24$	○ 変域の用語を用いる
○ 点PがCA上にあるときのxとyの関係を式で示し、式を利用すると時間からも、面積からも正確に求められることを知る $y = 4x$ $x = \frac{1}{4}y$  	○ $y=4x$ と書いたときは、xが主で、yが従であること 面積をきめて、時間を知るには、 $x=\frac{1}{4}y$ であることにもふれるが深入りをしない。
○ 点PがAを通ってAB上にあるとき、Cを出発してx秒後の△BCPの面積をy cm²として、xとyの　とりうる範囲（変域）を考えさせる  $6 \leqq x \leqq 14$ $24 \geqq y \geqq 0$	○ 点PがAの上にあるときが面積最大で、しだいに面積が減少することにふれる
○ 点PがAB上にあるときのxとyの関係を式で示し、式を利用すると時間から面積が、面積から時間が正確に求められることを知る ・ BPの長さを求める	○ BPの長さは　わかりにくいので、ていねいに考えさせる $PA = x-6$　であるから $BP = 8-(x-6)$

・ △BCPの面積　$y=(14-x)\times 6\times\frac{1}{2}$
$=3(14-x)$
$=42-3x$

○ $y=-3x+42$ は どのような関数か表、グラフを用いて確認する

③ 変域によって違った関数になることを考える

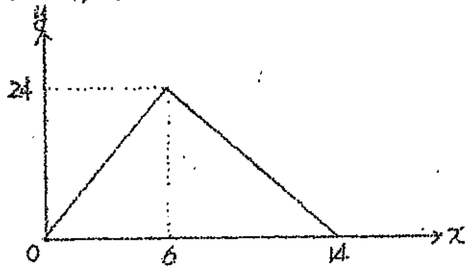
○ 発展的にとらえさせる

○ $0\leqq x\leqq 6$　　$y=4x$

○ $6\leqq x\leqq 14$　　$y=-3x+42$

○ 時間をはじめから連続して考えていくと、どんな関数のグラフになるか考える

○ グラフは生徒への発問と共に完成していくようにする



④ 本時のまとめ

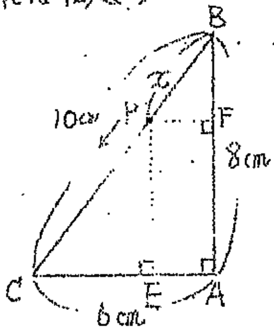
○ 式、グラフを利用すると問題解決が容易であることをまとめる

⑤ 時間が余ったときの課題（または宿題）

○ 一般には扱わない

○ 点PがBよりCまで動くとき、PよりCA，BAに垂線PE，PFをおろす。

PE＋PFをyとすると、yはBPの関数であることを確かめよ。



○ △PFB ∽ △CEP
△CEP ∽ △CAB
に着目させる

○ BP＝xとして、yをxの式で表せ。

・ 比例式でPF、PEをxの式で表す
$PF=\frac{3}{5}x$，　$PE=8-\frac{4}{5}x$

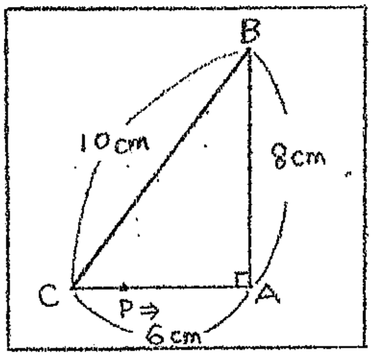
○ $x:PF=10:6$
$\therefore\ PF=\frac{3}{5}x$

○ $(10-x):PE=10:8$
$\therefore\ PE=\frac{8(10-x)}{10}$
$=8-\frac{4}{5}x$

・ $y=PE+PF=8-\frac{1}{5}x$
$\therefore\ y=-\frac{1}{5}x+8\quad(0\leqq x\leqq 10)$

(3) 第11時の授業記録

日時　昭和56年9月22日(火)　第6校時 (2:30～3:20)
対象　北区立稲付中学校　2年4組 39名
授業者　北区立稲付中学校　教諭　牛腸正則

目標と教師の活動	生徒の活動と反応	備考
① 課題の提示		
• 今日は，関数を利用する問題をやります．右のような直角三角形があります．いま、点Pが毎秒1秒の速さでCからAを通ってBまで動くとき、いろいろな量が変わります．何が変わりますか．	P　・・・・	
• (教室の戸を動かしながら) 戸が動くと、この長さやここの面積が変わりますね．さあ、点Pが動くと何が変わりますか	P_1　CPの長さが変わります．	
• まだありますね．CPの他に・・・・	P_2　PAの長さが変わります． P_3　△BAPの面積が変わります． P_4　△BCPの面積も変わる． P_1　BPの長さも変わります．	
• これくらいにしておきましょう．いまあげてもらったのはすべて点Pが動いていくと動き、点Pの場所が決まるとそれらも決まります．このような関係を何といいましたか．	P　関数．	
• そうですね．一方が変われば他方も変わり、一方が決まれば他方も決まるとき関数といいました．今日は、これらのうち「CPの長さ」と「△BCP		

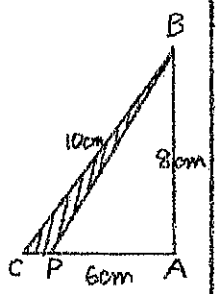
の面積」の関係について、くわしく勉強しましょう。

[2] 表に表わす

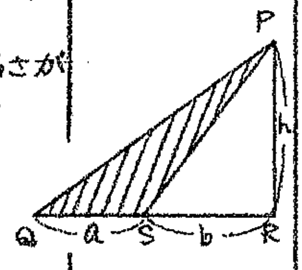
- 点Pは毎秒1cmの速さでCを出発し動いていくのだから、Cを出発してからの時間が決まると△BCPの面積が決まります。では、PがCを出発してからの時間と△BCPの面積を表に表わしてみましょう。

PがCを出発してからの時間(秒)	0	1	2	3	4…
△BPCの面積(cm²)					

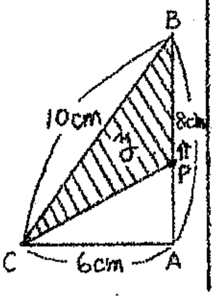
- 0秒後の△BCPの面積はいくらですか。 — P ・・・・
- こういうのは三角形とはいえないんだけどね。底辺は? — P_5 0.
- 高さは? — P_5 10cm.
- では面積は? — P_5 0です。
- そうですね。では1秒たちました。面積はいくらになりますか。



- 1秒たつとCAの長さは何cmですか — P_6 1cmです。
- そうですね。△BPCはこんな三角形になります。この面積は何cm²になりますか。 — P_6 5cm²です。
- このような三角形はあまり出てこないね。この△BPCの面積がわかる人。 — P_7 4cm²です。
- なぜ — P_7 底辺が1cm、高さが8cmだからです。
- では、△PQSの面積が$\frac{1}{2}ah$でいいかどうか、△PQS＝△PQR－△PSRを計算して考えておきなさい。

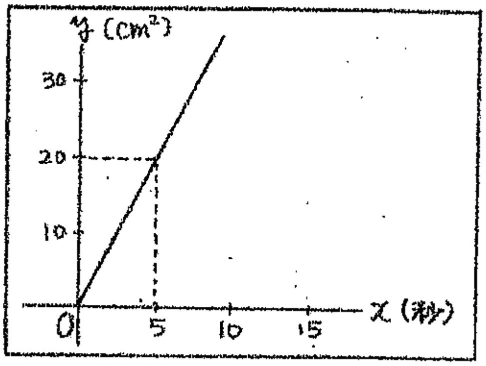


- では、2秒後の△BCPの面積はいくらですか。 — P_8 8cm²です。
- そう、2×8÷2で8ですね。では3秒後は。 — P_9 12cm²
- 4秒後は — P_9 16cm²
- 5秒後は — P_{10} 20cm²

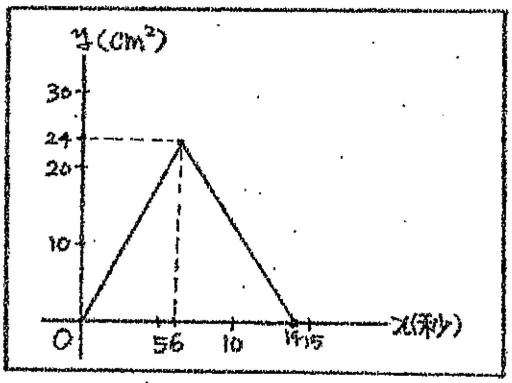
・ 6秒後は	P_{10} 24cm²	
・ 7秒後は	P_{11} 28cm²	
・ 8秒後は	P_{11} 32cm²	
・ 9秒後は	P_{12} CAの長さが6cmだから△BCPは24cm²より大きくなりません。	
・ そうです。CPの長さが6cmだから、PがCA上にあるには時間は0から6秒の間しかとりません。このような範囲のことを何といいましたか。	P_{13} 変域です	
・ そうですね。では、時間をx(秒)△BCPの面積をy(cm²)とすると、xの変域はどうなりますか。	P_{13} 0以上6以下です。	$0 \leqq x \leqq 6$ $0 \leqq y \leqq 24$
・ ではyの変域は。	P 0以上24以下です。	
③ 式に表す		
・ 次に、$0 \leqq x \leqq 6$のとき、yをxの式で表すとどうなりますか。	P_3 $y=4x$	$x=1$のとき$y=4$ $x=2$のとき$y=8$ ⋮ x秒後の面積y
・ そうですね。式は表より便利なことがあります。たとえば、PがCを出発してから2.5秒後，3.5秒後の面積もxに2.5，3.5を代入すれば求まります。面積が12cm²になるのは何秒後かは、$y=12$を代入すれば$x=3$，つまり3秒後ということがわかります。では、$y=4x$を変形して$x=\cdots$という式をつくりなさい。	P_{14} $x=\frac{1}{4}y$	
・ そうですね。$x=\frac{1}{4}y$では、面積がきまるとPがCを出発してからの時間がわかります。では次に、PがAからBに行くまでのときの△BCPの面積を考えてみましょう。 まず、yをxの式で表してみましょう。		
・ 何がxで表されれば、$y=\cdots$と表せますか。	P_2 BPの長さです。	
・ そう。PBの長さがxの式で表されれば、面積はxの式で表されるね。PBを底辺，CAつまり6cmを高さとする三角形の面積を求め		

ればいいね．では，PBの高さをxの式で表しなさい．	P …．	
・ Pが C を出発して x秒後にここにきたんだね．だからBPの長さをxを使って表すとどうなる．	P_{15} $(12-x)$ cm	
・ 12はどこから出てきたの．	P_{15} 底辺の6と高さの8をたして… アッ $14-x$です．	
・ そうだね．BPは$(14-x)$cmです．では，△BCPの面積yはどうなりますか．底辺が$(14-x)$cm，高さが6cmですね．	P_{15} $y=14-x\times6\div2$ です	
・ これでいいかな．	P_{16} かっこがないからダメです．	
・ そうです．では，かっこをつけて整理しなさい．	P ⟶	$y=(14-x)\times6\times\frac{1}{2}$ $=(14-x)\times3$ $=42-3x$
・ では，このときのxの変域はどうなりますか．$y=42-3x$ となるときのxの変域ですよ．	P_8 0以上8以下です．	
・ Pはどこから出発したの．Aから?	P_8 Cからです．	
・ では3秒後にはPはどこにいるの．CA上にいる? $y=42-3x$ になるには，PはCA上にいてくれないと困るね．さあ，どうかな．	P_8 6以上14以下です．	
・ そう，$6\leqq x\leqq14$ ですね．変域によって関数が違ってくるわけです．		
4 グラフに表す．	$y=4x$ $(0\leqq x\leqq6)$ $y=-3x+42$ $(6\leqq x\leqq14)$	←板書
・ では，これをグラフに表してみましょう． 用途に応じた座標軸をとるのですよ．このグラフは負の値をとりますか．xの目盛はどこからどこまであればいいですか．	P_{17} 0から14まで．	(机間巡視)
・ そう．xの変域を見ればわかると思うけど，0から14まであればいいんだね．では，yの変域は?	P_{18} 0以上24以下です．(代入しながら)	

• 式にxの変域を代入してもいいけれど、図を見ればすぐにわかるね。つまり、yの目盛は0から24まであればいいのですね。
　では、変域に注意してグラフを書きなさい。x軸の目盛とy軸の目盛の間隔は同じでなくてもいいですね。



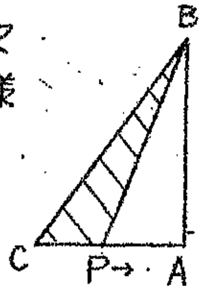
• 変域はどうしたの。y＝4xの変域は0≦x≦6だから、y＝4xのグラフは(x, y)＝(6, 24)までだね。注意しなさい。
　では、y＝－3x＋42のグラフをつけ足してみよう。これは直線になるから、2点が決まると書けるね。x＝6のときy＝24、x＝14のときy＝0だね。だからこんなグラフになります。このグラフを見ると、たとえば、面積が12 cm²になるのは3秒後と10秒後になることがすぐにわかります。このように、一般的な事象も表だけでなく、式やグラフに表すと便利なことがあります。

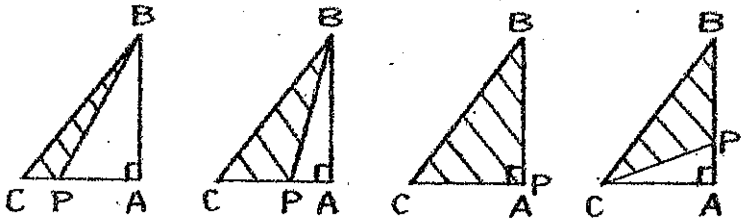


• 研究討議

㋐「毎秒1cmの速さ」の意味をしっかりと確認、把握させておく必要がある。

㋑ 時間と面積の表を作る前に点PがCを出発してAを通りBまで動く時の△BCPの形の変化の様子を把握させることが大切であろう。下の図のように、時間にともなって面積が変わることを図によってとらえさせたい。

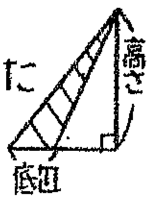




㋒ $x=\frac{1}{4}y$ にふれるよりも、グラフをかかせた時に、「△BCP＝12cm^2になるのは何秒後か」といった問いかけで触れた方がグラフの意味についても効果的な指導になる。

㋓ 6秒後には点PはAにきていることをはっきりとおさえておきたい。さらに「6秒を境にして△BCPの面積の変化の様子が変わるのだ。だから“$0 \leqq x \leqq 6$のとき”“$6 \leqq x \leqq 14$のとき”と場合分けをする必要がある」ことを生徒に意識させるべきである。

㋔ 右の三角形のように「高さ」が底辺の延長へひいた垂線の長さなので、△BCPの面積を求めるのに抵抗を示す生徒がいた。



㋕ $6 \leqq x \leqq 14$の時の△BCPの面積を求めるのに△BCA−△PCAとして求める生徒もいる。生徒のいろいろな考え方を大切にしたいところだ。

㋖ $6 \leqq x \leqq 14$の時、$y=-3x+42$ のグラフをかくことは難しかったようだ。表から点をプロットしてグラフを完成することで十分ではないだろうか。

(4) 第11時改訂指導案

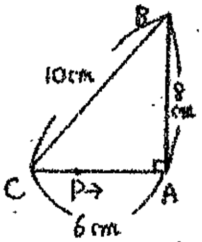
本時のねらい　　事実問題から一次関数を表す式を求めたり、それを利用して問題を解決できるようにする。

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>・題意を把握する</td><td>

課題

右の図のように∠A＝90°の△BCAがある。点PはCを出発して毎秒1cmの速さでAを通ってBまで動く。

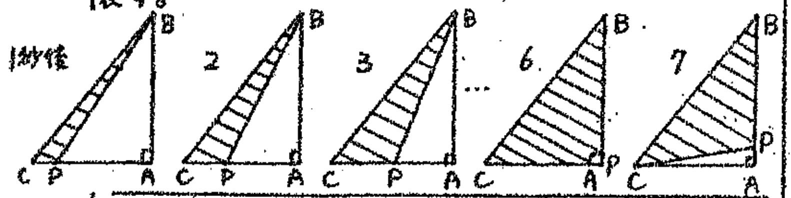
Pが動くとき、何が変わりますか。



</td><td></td></tr>
<tr><td>・変わるものをあげさせる</td><td>

①生徒に発表させる

②PがCを出発して1, 2, 3, …秒後の△BCPを図に表す。



</td><td>

・CPの長さ，BP，PAの長さ．△BAP，△BCPの面積

・6秒を境に変化のようすが変わることを確認する。

</td></tr>
<tr><td>・PがCA上を動くときの△BCPの面積を求めさせる。</td><td>

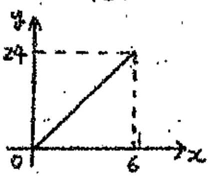
(I) 点PがCA上を動くときの△BCPの面積の変化の様子を調べる。

③ 1, 2, 3…秒後の△BCPの面積を求める。

<table>
<tr><td>時間(秒)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>…</td><td>6</td></tr>
<tr><td>面積(cm²)</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>…</td><td>24</td></tr>
</table>

④点PがCA上を動くとき，Cを出発してx秒後の△BCPの面積をy cm²として，x，yの値のとりうる範囲を考える。

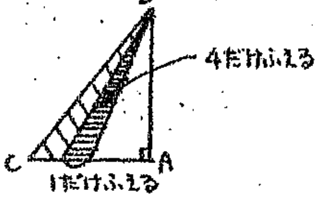
$0 \leqq x \leqq 6$，$0 \leqq y \leqq 24$



⑤x，yの関係をグラフ，式に表す。

$y = 4x$

⑥y＝4xの4の意味を図で考えさせる。



</td><td>

・$\triangle BCP = \dfrac{CP \times AB}{2}$ に注意させる。

・連続量であることにふれる。

・6秒後にPはAにきていることを再確認する。

・変域の用語を用いる。　0に注意

</td></tr>
</table>

・PがAB上を動くときの△BCPの面積を求めさせる。

(Ⅱ) 点PがAB上を動くときの△BCPの面積の変化の様子を調べる。

⑦ 7、8、9…秒後の△BCPの面積を求める。

時間(秒)	6	7	8	9	…	14
面積(cm²)	24	21	18	15	…	0

・14秒後にPはBにきていることを再確認する。

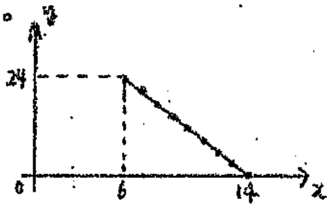
⑧ 点PがAB上を動くとき、Cを出発してx秒後の△BCPの面積をy cm²として、x、yの値のとりうる範囲を考える。

・6〜7秒後についてもふれる。

$6 \leqq x \leqq 14$, $24 \geqq y \geqq 0$

⑨ x、yの関係をグラフに表す。

(点をプロットして)



1. BP=(6+8)−x ∴ $y=\frac{(14-x)\times 6}{2}$
2. △BCA−△PCA
3. グラフから考える
4. 表から考える など

⑩ x、yの関係を式に表す。

$y=-3x+42$

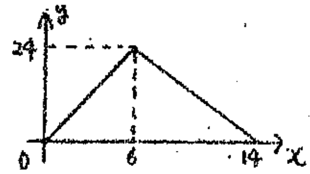
(Ⅲ) Ⅰ、Ⅱをまとめる。

・PがCを出発してBまで動くときのx、yの関係をまとめる。

⑪ 点PがCからAを通りBまで動くとき、Cを出発してx秒後の△BCPの面積をy cm²として、x、yの関係を考える。

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき $y=4x$

$6 \leqq x \leqq 14$ のとき $y=-3x+42$



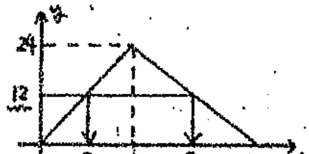
・グラフや式を利用して問題を解決させる。

⑫ △BCP=12cm² となるのは何秒後か考える。

・$12=4x$ $x=3$

・$12=-3x+42$ $x=10$

3秒後と10秒後



・△BCPの面積を求めても何秒後かはただ1つには決まらないことにふれてもよい。

・まとめ

⑬ 問題の解決には、表、グラフ、式を利用することが有効であることをまとめる。

第3学年

(1) 指導計画

15時間

項目		指導内容	用語	時数
いろいろな関数	2乗に比例する関数	○直角二等辺三角形の面積などから$y=ax^2$の式を導き、「2乗に比例」の定義をする。 ○「2乗に比例」する関係を式で表す。 ○比例定数を求める。	2乗に比例	②
	$y=x^2$のグラフ	○$y=x^2$のグラフをかく。 ○関数$y=x^2$の性質を調べる。 ○$y=x^2$のグラフを利用して$y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$などのグラフをかく。 ○$y=ax^2$のグラフが放物線という曲線であること，及びその頂点を知らせる。	放物線 頂点	2
	変化の割合	○いくつかの関数について変化の割合を求める。 ○関数$y=ax^2$と一次関数$y=ax+b$の特徴を比較する。		2
	いろいろな事象と関数	○2乗に反比例する関数及び$y=\frac{a}{x^2}$の式を導く。	2乗に反比例	③
	問題練習			1
集合と関数	定義域と値域	○定義域，値域の定義をする。 ○定義域を知って、値域を求める。	定義域 値域	②
	関数による対応	○関数について「定義域のおのおのの要素に、関数の値が1つだけ対応している」ことを理解させる。		①
	問題練習			1
練習問題		—		1

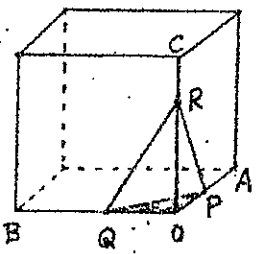
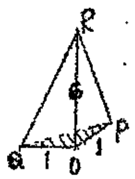
21+16×1/3=
20
18×1…=21.4
21+17×1/3=23…

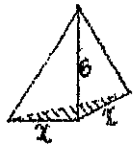
(2) 指導展開例

題目　いろいろな事象と関数（3時間）

第7時の指導

本時の目標　動点問題から、いろいろな関数を表す式を求めたり、それを利用して問題を解いたりすることができるようにさせる。

指導内容	学習活動	指導上の留意点
・問題を把握する	課題 右の図のように1辺10 cmの立方体の辺OA, OB, OC上をそれぞれ点P, Q, Rが動くものとする。 P, Qの速さは共に毎秒1 cmとし、三角すいO-PQRの体積をVで表す。  	・P, Qは等速度運動であることをしっかりおさえる。
・2乗に比例する関数を思い出す。	(I) RはOR=6 cmの位置に停止している。 P, Qは同時にOを出発する。 ① 1秒後、2秒後、3秒後の体積Vを求める。  $\underbrace{1\times1\times\frac{1}{2}}_{底面積}\times\underset{高さ}{6}\times\frac{1}{3}$ 時間（秒）｜ 1　2　3　… 体積（cm^3）｜ 1　4　9　… ② P, QがOを出発してx秒後の体積Vをy cm^3とするとき、x, yの値のとりうる範囲を考える。 $0\leqq x\leqq 10$, $0\leqq y\leqq 100$ ③ xとyとの関係を式で表す。	・三角すいの体積の求め方を確認する。 ・時間、体積はいずれも連続量であることにもふれる。 ・定域をおさえる。

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


$y = \frac{x^2}{2} \times 6 \times \frac{1}{3}$

$\therefore y = x^2$

・表や式から、yはxの2乗に比例する関数であることを確認する。
</td>
<td>・$x = 1, 2, 3$ を代入して①の表と比較し、立式が正しいことを確認する。</td>
</tr>
<tr>
<td>・導いた式を用いて問題を解決する。</td>
<td>
④ ア．8秒後の体積Vを求める。

$y = 8^2 = 64$ (cm³)

イ．体積が50 cm³になるのは何秒後か。

$50 = x^2$　　$x = 5\sqrt{2}$ (秒)
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・3乗に比例する関数を見いだす</td>
<td>
(Ⅱ) RもP，Qと同様、毎秒1 cmの速さで動き、P，Q，R 3点が同時にOを出発する。

⑤ 1秒後，2秒後，3秒後の体積Vを求める。

$1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}$

時間(秒)	1	2	3	…
体積(cm³)	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{2}$	…

⑥ P，Q，RがOを出発してx秒後の体積Vをy cm³とするとき、x，yの値のとりうる範囲を考える。

$0 \leqq x \leqq 10$，　$0 \leqq y \leqq \frac{500}{3}$

⑦ xとyとの関係を式で表す。

$y = \frac{x^2}{2} \times x \times \frac{1}{3}$

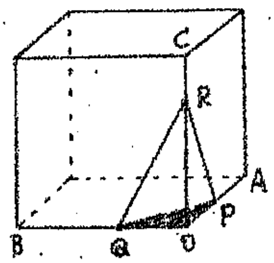
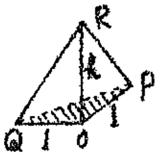
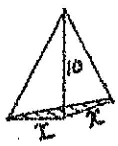
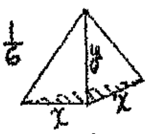
$\therefore y = \frac{1}{6}x^3$
</td>
<td>・①での考え方を参考にする。</td>
</tr>
<tr>
<td>・3乗に比例することを表す式</td>
<td>
⑧一般に、2つの変数xとyの間に、

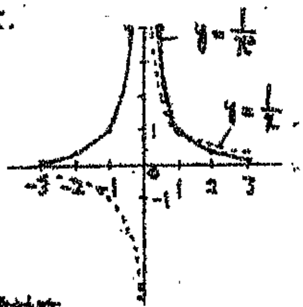
$y = ax^3$ (aは0でない定数)

の関係があるとき、yはxの3乗に比例する関数であることを知る。
</td>
<td>・$y = ax^3$ については、深入りしない。</td>
</tr>
<tr>
<td>・本時のまとめ</td>
<td>⑨ 本時の学習内容のまとめをする。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

第8時の指導

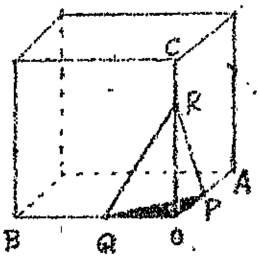
本時の目標　2乗に反比例する意味とその式の形について理解させる。

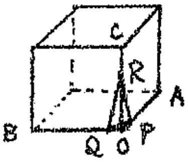
指導内容	学習活動	指導上の留意点
・前時の復習	① 前時の課題を思い出す。 ・P, Qの速さは、共に毎秒1cm. ・三角すいO－PQRの体積をV. 	
・2乗に反比例する関数を見いだす	(Ⅲ) 体積Vが $\frac{1}{6}$ cm³ になる場合を考える。 ② 1秒後，2秒後，3秒後のときのORの長さを求める。  $1\times1\times\frac{1}{2}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 時間（秒）: 1, 2, 3 … OR（cm）: 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ … ③ P, QがOを出発してx秒後のORの長さをy cmとするとき、x, yの値のとりうる範囲を考える。  $\frac{x^2}{2}\times10\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $x^2=\frac{1}{10}$，$x=\frac{\sqrt{10}}{10}$  $\frac{10^2}{2}\times y\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $y=\frac{1}{6}\times\frac{3}{50}=\frac{1}{100}$ $\frac{\sqrt{10}}{10}\leqq x\leqq10$，$\frac{1}{100}\leqq y\leqq10$ ④ xとyとの関係を式で表す。 $\frac{1}{6}$  $\frac{x^2}{2}\times y\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $x^2y=1$ $\therefore\ y=\frac{1}{x^2}$	・体積一定 ・y＝10のとき xは最小 ・x＝10のとき yは最小 ・変域については、教師の指導に重点をおくこともある。
・導いた式を利用する	⑤ 5秒後のときのORの長さを求める。 $y=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$ (cm)	

・$y=\frac{1}{x^2}$ の変化のようすについて考える。	⑥ xの変域を実数全体として、$y=\frac{1}{x^2}$ の変化のようすを調べる。 $\begin{array}{c\|ccccccccc} x & \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline y & \cdots & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & 1 & / & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \cdots \end{array}$ ・xが2倍, 3倍…, n倍のとき、yは$\frac{1}{2^2}$倍, $\frac{1}{3^2}$倍, …, $\frac{1}{n^2}$倍になる。 ⑦ $y=\frac{1}{x^2}$ のグラフをかく。  	・変域を実数全体に拡げたことを確認する。 ・$y=\frac{1}{x^2}$ だから、$x=0$は定義できないことを注意する。 ・$y=\frac{1}{x}$ のグラフと比較しておく。
・$y=\frac{1}{x^2}$ についてまとめる。	⑧ $y=\frac{1}{x^2}$ では、 ・グラフはy軸に関して線対称 ・$\begin{array}{c\|ccc} x & - & 0 & + \\ \hline y & \nearrow & / & \searrow \end{array}$ ・xの値にかかわらず、$y>0$ ⑨ 一般に、2つの変数xとyの間に $y=\frac{a}{x^2}$ (aは0でない定数) の関係があるとき、yはxの2乗に反比例する関数であることを知る。	・漸近線については深入りしない。 ・ここまでに$a=1$の場合を考えてきたことをおさえる。 ・$x^2y=a$ に注意
・本時のまとめ	⑩ 本時の学習内容のまとめをする。	

(3) 第7時の授業記録

・日　時　昭和56年11月26日（木）
・対　象　多摩市立多摩中学校　第3学年E組　39名
・授業者　多摩市立多摩中学校　教諭　小澤　慶晃
・授業記録

指導内容と教師の活動	生徒の活動と反応	備　考
[1] 今日はいろいろな関数について勉強します。今までに学習した関数を使って問題を解決してみよう。まず、問題文を読んでください。（右の課題を掲示）	課題 右の図のように1辺10cmの立方体の辺OA，OB，OC上をそれぞれ点P，Q，Rが動くものとする。 P，Qの速さは共に毎秒1cmとし、三角すいO-PQRの体積をVで表す。  	
・1辺10cmの立方体があります。頂点をO，A，B，Cとして、3つの辺上をP，Q，Rの3点が動きます。		
・点Pはどの辺上ですか。 ・点Qはどの辺上ですか。 ・点Rはどの辺上ですか。	P_1　OA上です。 P_2　OB上です。 P_3　OC上です。	点P，Q，Rを磁石を用いて示し、動かして見せる。
・動かす時には条件が必要ですが、この場所、P，Qが毎秒1cmで動くということです。		
[2] (I)の問題です。RはOR＝6cmの位置に停止しています。P，Qは、同時にOを出発します。	(I) RはOR＝6cmの位置に停止している。P，Qは、同時にOを出発する。	
・OPとOQの長さの関係		

はどうですか。	P_4 等しいです。	(以上6分)
(立方体見取図のプリントを配布)		
・縮尺は$\frac{1}{2}$です。1秒後のP, Q, Rの位置をとってみよう。	<生徒作業> (OPの長さをどうとるかで意見が出る)	
・長さは、正確でなくてもよいです。	<作業終了> 	(以上9分)
③ 長さを考えてみよう。		
・1秒後、OPの長さはどうですか。	P_5 1cmです。	
・OQの長さはどうですか。	P_6 1cmです。	
・ORの長さはどうですか。	P_7 6cmです。	
。では、三角すいO-PQRの体積が計算できますね。やってみてください。	(図を見て考えている者もいて、生徒自身で計算できない様子。)	
・公式を忘れているようですね。三角すいの体積を求める公式を言ってください。	P_8 $\frac{1}{3}Sh$。 Sは底面積で、hは高さです。	
・この時、底面積はどのように計算できますか。	P_9 ……	
・底面は何三角形ですか。	P_{10} 直角二等辺三角形です。	
・では、どう計算しますか。	P_{11}(底面積は) $1\times1\times\frac{1}{2}$。 体積は、$1\times1\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}$	
・答えはどうなりますか。	P_{12} $1cm^3$です。	(以上13分)
・2秒後、3秒後の体積を計算してみよう。	P_{13} $2\times2\times6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=4\ cm^3$ P_{14} $3\times3\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}=9\ cm^3$	表を板書しておく。

④ x秒だったらどうなるか考えてみよう。(右のことを板書)	「P, Qが、Oを出発して、x秒後の体積Vがy cm³となる」	
このとき、xの変域は、どうなりますか。	P15 0以上6以下です。 P16 えっ! P15 あっ! 10だ。	・中には、先に式を求める者もいた。
・どうしてですか。	P15 1辺10cmだから。	
・そうですね。1辺10cmだから、PはOを出発して10秒でAまできます。 では、yの変域は、どうなりますか。体積ですよ。	P17 0以上100以下です。	(以上20分)
・10秒たったときの三角すいの体積だから、100ですね。 では、yをxの式で表そう。	P18 $y=x^2$	
・どう計算しましたか。	P19 さっきと同じです。 ($x\times x\times\frac{1}{2}\times 6\times\frac{1}{3}=x^2$)	
・表を見て、2乗すればよさそうと見当をつけてもいいですね。	(一同うなずく)	$\begin{array}{c\|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 1 & 4 & 9 \end{array}$
⑤ この式を使って計算してみてください。8秒後の体積はどうなりますか。	P20 64cm³です。	
・では、体積がさっきの100cm³の半分50cm³になるのは何秒後ですか。	P21 (板書) $50=x^2$ $5\sqrt{2}=x$ 5√2秒後	2次方程式の解の吟味について触れる。
・式から、yはxの2乗に比例することがいえます。 次に3点P.Q.R全部を動かしてみよう。以下第8時と同じ		(以上28分)

・研究討議

（課題について）

㋐生徒は、最初、課題の内容がはっきりわからなかったようだ。「体積をVで表す」という所を「三角すいO-PQRの体積（の変化）について調べましょう」と直してはどうか。また、このことにより、「Vをycm³とする」という表現がなくなり、三角すいの体積という意味の文字Vを使わないため、変数yがとらえやすい。

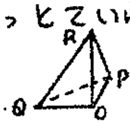
㋑1つの教材で二乗に比例・三乗に比例・二乗に反比例などを通してやろうとするねらいは有効であり、生徒の混乱も少ないと思われる。この二乗に比例する内容の前に、点P,Qをある地点に停止させ、点Rが辺OC上を動くようなものを指導すれば、後の指導に生きてくると思う。

㋒見取図として、斜投影を用いたが、OA≠OBのため、OP≠OQとなり、見取図と実際のギャップで悩む生徒が見られ、指導に配慮が必要である。また、等角投影を用いることも考えられる。

（指導について）

㋓配布プリントの立方体の見取図に、三角すいO-PQRを書き入れたのは、1秒後だけであった。2秒後，3秒後の図も書き入れさせて、体積の増加することを視覚的にとらえさせたい。

㋔体積を求める時、生徒に課題を理解させる意味で、もっとていねいに指導してみてはどうか。　例えば、三角すいO-PQRは



のようにぬき出して図に表し、OP,OQ,ORの長さを記入。

㋕体積計算で、時間と長さをはっきり分けて指導する。かける数が、1秒とか2秒ではなく、1cm，2cmであることを明確に。

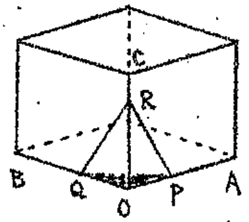
㋖「8秒後の体積を式を用いて求めよ」と発問したが、ここでは生徒に自由に考えさせ、体験の中から式の便利さをつかませたい。

㋗3.5秒や2.2秒の体積についても聞いて、離散的にだけとらえさせない工夫がほしい。

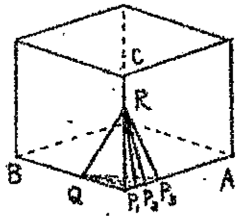
(4) 第7時　改訂指導案

(ア) 本時のねらい　事実問題から、いろいろな関数を表す式を求めたり、それを利用して問題を解いたりすることができるようにさせる。

指導内容	学習活動	指導上の留意点
◎課題を把握する。	課題 右の図のように、1辺10cmの立方体の辺OA, OB, OC上をそれぞれ点P, Q, Rが動く。 点P, Q, Rの動き方によって、三角すいO-PQRの体積がどのように変化するか、考えよう。（以下「体積」といったら、三角すいO-PQRの体積を考えていることとする。）	
*正比例の関係について考える。	(I) 点Q, Rはそれぞれ OQ=4cm, OR=6cmの位置に停止している。点Pは、頂点Oを出発して、毎秒1cmの速さで、頂点Aに向けて動く。	◦立方体の見取図を数個かいたプリント配布。



① 1, 2, 3秒後のときの三角すいO-PQRのようすを見取図に記入する。



② 1, 2, 3 … 秒後の体積を求める。

$4\times1\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}$

$4\times2\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}$

$\underbrace{4\times3\times\frac{1}{2}}_{底面積}\times\underbrace{6\times\frac{1}{3}}_{高さ}$

時間（秒）	1	2	3	…
体積（cm^3）	4	8	12	…

◦三角すいの体積の求め方を確認する。（ていねいに）

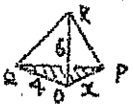
◦時間, 体積はいずれも連続量であることにもふれる。

③ PがOを出発してx秒後の体積をy cm^3とするとき、x, yの値のとりうる範囲を考える。

$0\leqq x\leqq10$,　$0\leqq y\leqq40$

◦変域をおさえる。

④ xとyの関係を式で表す。

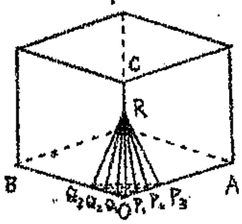


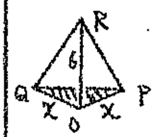
$y=4\times x\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}$ 　$\therefore y=4x$

◦表や式から、yはxに正比例していることを考えさせる。

◦x=1, 2, 3…を代入して、②の表と比較し、立式が正しいことを確認する。

<table>
<tr>
<td>●導いた式を用いて問題を解決する。</td>
<td>⑤ア. 5.8秒後の体積を求める。
$y=4\times5.8=23.2$ (cm³)
イ. 体積が28 cm³になるのは何秒後かを求める。
$28=4x$ ∴ $x=7$ (秒)</td>
<td>○連続量であることを再確認する。</td>
</tr>
<tr>
<td>●2乗に比例する関数を見いだす。</td>
<td>(II) 点RはOR=6cmの位置に停止している。点P, Qは同時に頂点Oを出発して、毎秒1cmの速さで動く。

⑥1, 2, 3秒後のときの三角すいO-PQRのようすを見取図に記入する。

⑦1, 2, 3 ･･･秒後の体積を求める。

$1\times1\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}$
<table>
<tr><td>時間 (秒)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>･･･</td></tr>
<tr><td>体積 (cm³)</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>･･･</td></tr>
</table>
⑧P, QがOを出発してx秒後の体積をy cm³とするとき、x, yの値のとりうる範囲を考える。
$0\leqq x\leqq10$, $0\leqq y\leqq100$
⑨xとyの関係を式で表す。

$y=\frac{x^2}{2}\times6\times\frac{1}{3}$
∴ $y=x^2$
○表や式から、yはxの2乗に比例する関数であることを確かめる。</td>
<td>○①②での考え方を参考にする。

○⑦の表と比較し立式が正しいことを確認する。</td>
</tr>
<tr>
<td>●導いた式を用いて問題を解決する</td>
<td>⑩ア. 8秒後の体積を求める。
$y=8^2=64$ (cm³)
イ. 体積が50 cm³になるのは何秒後かを求める。
$50=x^2$ $(x>0)$ ∴ $x=5\sqrt{2}$ (秒)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>●まとめ</td>
<td>⑪本時の学習内容のまとめをする。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

○第8時改訂指導案（項目のみ）

(III) P, Q, Rは同時にOを出発して、毎秒1cmの速さで動く。（3乗に比例）

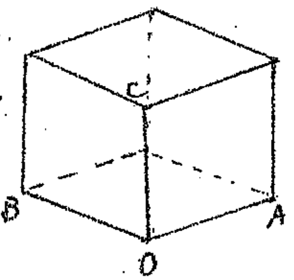
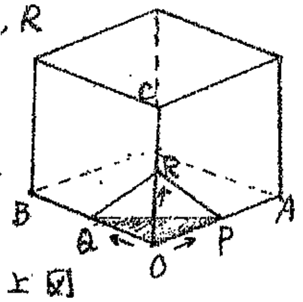
(IV) 体積が $\frac{1}{6}$ cm³になる場合を考える。（2乗に反比例）

(5) 第8時（改訂案）の授業記録

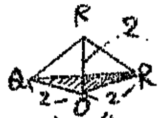
・日　時　昭和57年1月14日（木）

・対　象　品川区立伊藤中学校　第3学年9組　40名

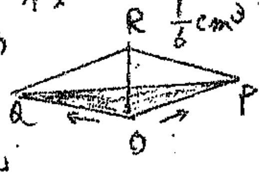
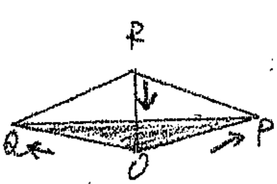
・授業者　品川区立伊藤中学校　教諭　国宗　進

指導内容と教師の活動	生徒の活動と反応	備考
1（前時の課題を思い出させる。）前の時間では、点Pは辺OA上を、点Qは辺OB上を、点Rは辺OCをいろいろな条件で動かしましたね。 ・今日は、点P，Q，Rを同時にOを出発して、毎秒1cmの速さでそれぞれA，B，Cまで動かします。 ・立方体の1辺は10cmです。 このとき三角すいO-PQRの体積を考えて下さい。	立方体の辺上を3点P，Qが，Rが動くことを思い出す。 見取図でA，B，C，Oの位置を確認する。  点P，Q，Rの動いてゆく様子がつかみにくい生徒は、右上図のように見取図を使って考えてゆく。  	立方体の見取図をかいたプリントを配布。 以下「体積」と言ったら「三角すいO-PQRの体積」であることを約束する。（以上8分）
2 点P，Q，RがOを出発してから1秒後、2秒後，3秒後の体積をそれぞれ求めなさい。	すい体の体積の求め方を再確認する。 (底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$	

<table>
<tr>
<td>・では1秒後の体積は？
・底面は三角形だから底面積は$1\times1\times\frac{1}{2}$，高さ1ですい体だからそれに$\frac{1}{3}$倍するのですね。</td>
<td>P_1 $\frac{1}{6}$ cm³です。

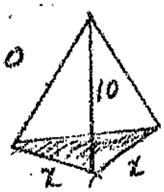
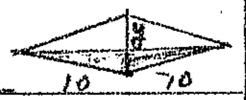
$\underbrace{1\times1\times\frac{1}{2}}_{底面積}\times\underbrace{1}_{高さ}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ (cm³)</td>
<td>左図を立方体の見取図からぬき出してかいて見せる。</td>
</tr>
<tr>
<td>・2秒後の体積は？</td>
<td>P_2 $\frac{4}{3}$ cm³です。
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・どのように求めましたか。</td>
<td>P_2 $2\times2\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ (cm³)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・3秒後は？</td>
<td>P_3 4.5 cm³です。つまり$\frac{9}{2}$cm³です。
$3\times3\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{3}=\frac{9}{2}$ (cm³)
として求めました。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・求め方は、しっかりつかんできましたね。では、x秒後の体積をy cm³とします。yをxの式で表してみましょう。</td>
<td>（表に上の結果をまとめておく。）
<table>
<tr><td>時間(秒)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>体積(cm³)</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{4}{3}$</td><td>$\frac{9}{2}$</td></tr>
</table></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ではP_4君求められましたか。</td>
<td>P_4 P_3の考えで 3のかわりにxを置いて
$x\times x\times\frac{1}{2}\times x\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}x^3$
だから $y=\frac{1}{6}x^3$です。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・P_3の3だけでなく、P_1，P_2の求めたときの1や2のかわりにxを置いて求めればよいのですね。</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・表からやったり他の方法から$y=\frac{1}{6}x^3$を求めた人はいませんか。</td>
<td>P_5 P_4と同じです。
P_6 P_4と同じです。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・P_7君は表をじっと見ていましたね。</td>
<td>P_7 はい。でもできませんでした。</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>・表を見て、約分する前の形で体積をかいてみるとわかると思います。</td>
<td>
<table>
<tr><td>時間</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>…</td><td>x</td></tr>
<tr><td>体積</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{8}{6}$</td><td>$\frac{27}{6}$</td><td></td><td>$\frac{x^3}{6}$</td></tr>
</table>
P7　2の3乗が8、3の3乗が27だから　x秒後はxの3乗に$\frac{1}{6}$倍すれば　$y=\frac{1}{6}x^3$は求められます。
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>・yとxの関係を言葉で言うと？
・そうですね。$\frac{1}{6}x^2$だったらyはxの2乗に比例です。</td>
<td>P8「yはxの3乗に比例する」といえます。</td>
<td>$y=ax^3$の形を$y=ax$, $y=ax^2$と比べる程度にし、深入りはしない。
（以上20分）</td>
</tr>
<tr>
<td>3・では次が大切です。

・違いますが、yはxの4乗に比例の式はわかりますか。
・点P，Qが毎秒1cmで進み、点Rはどのように動くかというと、体積が常に$\frac{1}{6}$cm³となるように動くとします。
・点PはAに向って、点QはBに向って毎秒1cmの速さで動くのです。同時にOを出発して何秒後にA，Bに着きますか。
・では点Rは時間がたつとどのような動きをしますか。</td>
<td>P?「yはxの4乗に比例する」ことをやるんですか。
P9　$y=x^4$かな？
P10　$y=ax^4$です。
生徒は、イメージがつかめない様子。

「常に$\frac{1}{6}$cm³」ということから上図をかくなどして点Rの動きをとらえようとする。
P11　10秒後です。

P12 点Oに近ずいてきます。</td>
<td>体積は常に$\frac{1}{6}$cm³になることを強調。

底面積が大きくなると、ORは小さくなることを強調。</td>
</tr>
</table>

・では、点P, QがOを出発して1秒後、2秒後、3秒後のORの長さは? ORの長さをh cmとして考えさせる。	・1秒後 $\underbrace{1\times1\times\frac{1}{2}}_{底面積}\times \underbrace{h}_{高さ}\times\underbrace{\frac{1}{3}}_{すい体}=\frac{1}{6}$ 体積 $h=1$  ・2秒後 $2\times2\times\frac{1}{2}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ h=\frac{1}{4}$ ・3秒後 $3\times3\times\frac{1}{2}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ h=\frac{1}{9}$ 時間(秒) 1 2 3 OR(cm) 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{9}$	途中の式の計算をていねいに指導する。
・x秒後のORの長さをy cmとするとxとyの関係を式で表して下さい。	(しばらく考えてから) P13 $\frac{1}{x^2}$です。 P14 $y=\frac{1}{x^2}$です。 P15 先生、このような関係の式はあるのですか。	新しい式の形に生徒は驚きを見せる。
・はい。x秒後は底面積が$x\times x\times\frac{1}{2}$で体積は$\frac{1}{6}$cm³だから $x\times x\times\frac{1}{2}\times y\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ から両辺を6倍すると $x^2y=\frac{1}{6}$から $y=\frac{1}{x^2}$。 表を見てもこの式が考えられますね。	(表にまとめておく。)  P16 $x=2$のとき $y=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ $x=3$のとき $y=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$ だから $y=\frac{1}{x^2}$ ですね。	(以上40分)
④ この関数$y=\frac{1}{x^2}$のx, yの変域は? ・$x=0$のとき体積は$\frac{1}{6}$になりません。だからといって $0<x\leqq\square$ということではありません。 ・xはいくつまでとりますか。	$0\leqq x\leqq\square$とかこうとする。 ・□の方を先に考えはじめた。 P17 10までです。	

・yは、どこまでの値をとりますか。 ・xは分数でもよいのです。連続しています。だからxが小さくなれば、yが大きくなることもあります。では計算してみます。	P17 10cmまでゆくのでは？ P18 いや10cmまでは・・・・ 意見がわかれた。10cmまでいかないと考える生徒が多い。 $x=10$ のとき $10\times10\times\frac{1}{2}\times y\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $100y=1$ $y=\frac{1}{100}$	
・だから $x=10$ のとき yは $\frac{1}{200}$ や $\frac{1}{1000}$ にはなりません。	直接式と $x=10$ を代入して $y=\frac{1}{10^2}$ $y=\frac{1}{100}$	$x=10$ のときyは最小、$y=10$ のときxは最小となることを意識させる。
・xが1番小さくなるときyはどこにいますか。	P17 10です。 $x\times x\times\frac{1}{2}\times10\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $10x^2=1$ $x^2=\frac{1}{10}$, $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$	変域については教師の指導に重点をおくこともある。
・本当は $x=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ ですね。この場合xはプラスだから $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ですね。 ・したがってxの変域は	・有理化をしてxを求める。 $x=\frac{1\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$, $x=\frac{\sqrt{10}}{10}$ P19 $\frac{\sqrt{10}}{10}\leqq x\leqq10$  	
yの変域は？	P20 $\frac{1}{100}\leqq y\leqq10$  	(以上 48分)
5 ・Oを出発して5秒後の体積は？ ・そうですね。では5秒後のORの長さは。 ・いろいろな方法で出せますが式を利用すれば簡単ですね	生徒はとまどう。 P21 先生、いつも $\frac{1}{6}$ cm³ ではなかったのですか。 図をかいたり、$5\times5\times\frac{1}{2}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ から求めようとする生徒もいる。 式を利用して $y=\frac{1}{5^2}$ から $y=\frac{1}{25}$	(以上50分)

・研究討議

㋐ 授業者から

3年生の指導が一応終った後、「いろいろな事象と関数」の所でいままで学習した関数の道具をいろいろ使いながら関数のまとめをしてゆこうとするねらいがある。今日の授業は、前時の指導と大きくからんでいる。前の指導計画では、立方体の辺上を2点Q, Pが動くとして、$y=ax^2$を導入した。しかし、11月の研究授業(授業者　多摩中　小沢氏)で、辺上をまず1点が動くもの、つまり$y=ax$から導入した方がわかりやすいという意見が出た。実際やってみたが、1点が動く場合はあまり興味を示さず、2乗に比例、3乗に比例の学習にゆくまで、新鮮でなくなり、しつこいという感じがした。やはり、「いろいろな事象と関数」では、2乗に比例から導入してゆきたい。時間の関係で③はカットした。指導案では、②→③→④, ⑥→⑦→⑧のように変域を求めてから、式を出す授業の流れだが、実際に内容を考えてみると、式を求めてから変域にふれる方が自然のように思えた。だから　実際の授業は、②→④→③, ⑥→⑧→⑦　の流れで行った。

㋑ 実際の授業を見て、やはり表から式そして変域とゆく方が自然に指導ができると思った。

㋒ この授業で、変域は指導しなくてもよいのでは…。

㋓ 一般の事象としては　やはり変域を意識したい。今回の変域については、やや難しいので生徒に考えさせるよりも、教師から与えてもよいと思う。

㋔ この変域は難しい。指導後もyが10までの値をとることを生徒は認めていない。

㋕ yの変域で、生徒がとまどったとき指導者は表に戻り、0.5秒のときのORの長さを問題にしたのはよかったと思う。もっと時間があれば、生徒の理解が深まったと思う。

㋖ この場合、変域を後に指導してよいと思うが、普通は変域から式としてゆく。変域をきちんとおさえないと式が出ない場合もある。

㋗ 今回は、グラフがないので式から変域でよい。グラフが出てくるときは、変域をおさえて、その変域での式をつかむことが必要になってくる。教材の性質によって 授業の流し方を変えてゆけばよいと思う。
㋘ 変域はこの授業ぐらいまで追求する必要があるかが問題である。2乗に反比例することまでつかませればよいのでは…。
㋙ グラフがないのでイメージがつかみにくい所もある。グラフを入れて2乗に反比例だけで1時間かけて指導したい。
㋚ 「4乗に比例」と生徒が言ったとき、生徒の感覚からその言葉が出たと思った。そのような例を生徒にあげさせられたら、すばらしいのだが…。
㋛ 授業者は表から何かを読みとることを強調している。この表で、時間(秒)1のときORを $\frac{1}{5}$、2, 3秒のときORを $\frac{1}{5^2}$, $\frac{1}{5^3}$ とすれば、もっと式へのステップがちぢまったのでは…。表から、ORの長さを差をとって求めようとした生徒がいた。
㋜ 式の有効性を知る場面があってよかった。㋑で、式を利用する生徒と $5\times5\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ のようにはじめに戻って計算をする生徒にわかれた。6人の生徒を観察していたら、式を利用したのはそのうち2人だった。教師が $y=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$ という考えを取り上げたら、ほとんどの生徒はその方が簡単であると認めていた。
㋝ まとめのあり方で、今日は計算をしながらまとめていったが、少し見方を変えれば、2乗にも3乗にも比例することを強調してゆくまとめ方も考えられる。
㋞ まとめの所で、おさえておく内容は何だろうか。それによって指導方法が変わる。
・中学校の最後の段階では、本来文からいきなり式をつくりたい。生徒の実態にもよるが、式を利用する方に重点をおきたい。
㋟ 2乗に反比例の指導後に、まとめとしてこの教材を持ってきたい。ただし、2乗に比例、反比例の教材について議論がなされなければならない。教材としてもっと簡単なものがあればよいが…。

Ⅱ．評価問題と生徒の実態

これまで述べたように、授業研究を通して指導計画、指導案を検討、改訂するうちに、その指導を行ってその評価をいかに行うか、生徒の理解の程度はどうなのかが問題となった。そこで、昨年度作成した評価問題を修正し、さらに生徒の実態を調査、分析することにした。

第２学年

(1) 評価の観点

〈1〉１次関数の意味

①式から１次関数であることが判別できるか。

〈2〉１次関数の性質とグラフ

①傾き a，切片 b が式からわかるか。

②変化の割合が一定であることの意味がわかるか。

③グラフがかけるか。

④グラフでの傾き、切片と式の関係がわかるか。

⑤グラフから１次関数であることが判別できるか。

〈3〉１次関数の決定

①a，b が与えられたとき

②b と１組の x, y の値が与えられたとき

③a と１組の x, y の値が与えられたとき

④２組の x, y の値が与えられたとき　　　　など

〈4〉１次関数の利用

①具体的な事象から変量をとらえることができるか。

②伴なって変わる２つの数量の関係を式に表せるか。

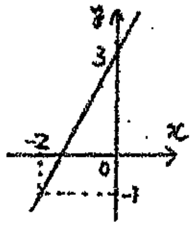
③変域がわかるか。

昨年度の評価の観点に含まれていた２元１次方程式に関する内容については、数式領域との関係を考えて今回から除外することにした。（対応する評価問題についても同様）

(2) 評価問題

[評価の観点]

1. 次の問いについて、あてはまるものを、下の㋐から㋔の中から選び、記号で答えよ。



(1) yがxの1次関数であるものはどれか。 [<1> ①]

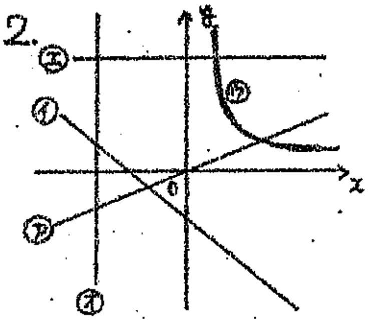
(2) グラフが右上がりの直線であるものはどれか。 [<2> ④]

(3) グラフが右のグラフと平行であるものはどれか。 [<2> ④]

(1)	(2)	(3)

[㋐ $y=-2x+3$ ㋑ $x=3y$ ㋒ $y=2$ ㋓ $y=\frac{3}{x}$ ㋔ $y=2x$]

2.



左の㋐から㋔のグラフについて、yがxの1次関数であるものには○を、そうでないものには×をつけよ。ただし㋓はx軸に、㋔はy軸に平行とする。 [<2>⑤]

㋐	㋑	㋒	㋓	㋔

3. 1次関数 $y=-3x+2$について、次の問いに答えよ。

(1) $x=-2$のときのyの値を求めよ。 [<2>]

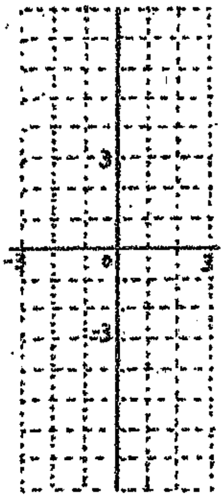
(2) $y=11$となるようなxの値を求めよ。 [<2>]

(3) このグラフの傾きを求めよ。 [<2>①]

(4) このグラフの切片を求めよ。 [<2>①]

(5) このグラフを右の座標平面にかけ。 [<2>③]

(6) xの値が3増加したとき、yの値はどれだけ増加するか。 [<2>②]



4. 右の表で、yがxの1次関数であるとき、□にあてはまる数を記入せよ。

x	1	2 …	5	… □
y	5	8 …	□	… 26

[<2>②]

5. 次の問いに答えよ。

(1) 点(0, 5)を通り、傾き3の直線の式を求めよ。 [<3> ①]

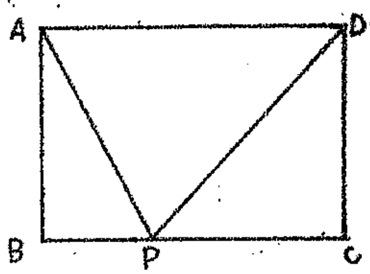
(2) 切片が−2で点(2, 6)を通る直線の式を求めよ。 [<3> ③]

(3) 右の図の直線の式を求めよ。 [<3>]

(4) 変化の割合が−2で $x=4$ のとき $y=10$ である1次関数の式を求めよ。 [<3> ②]

(5) 2点(1, 3), (3, 7)を通る直線の式を求めよ。 [<3> ④]

6. 右の図のようにAB=4cm, BC=7cmの長方形ABCDの辺BC上を点PがBを出発してCまで毎秒1cmの速さで動く。AとP, DとPを結ぶとき、次の問いに答えよ。



(1) 点PがBからCまで動くとき、「変わるもの(変数)」は次のどれか。すべて選び記号で答えよ。 [<4> ①]

㋐ △ABPの面積　㋑ △APDの面積　㋒ △PCDの面積

㋓ 長方形ABCDの面積　㋔ 台形ABPDの面積

(2) 点PがBを出発して2秒後の△ABPの面積を求めよ。 [<4>]

(3) 次の□にあてはまる式または数を記入せよ。 [<4> ②③]

点PがBを出発して x 秒後の△ABPの面積を y cm²としたとき、

y を x の式で表すと、$y=$ □ である。

このとき x の変域は □ $\leqq x \leqq$ □

y の変域は □ $\leqq y \leqq$ □ である。

(3) 結果の分析

① 正答率　　調査時期　1981年12月　調査時間　40分

調査対象　東京都公立中学校2年生75人

問題番号	正答	正答率	無答率	主な誤答例　( )内 誤答率 %			
1 (1)	ア,イ,オ	25 %	0 %	ア,オ (29) ア,イ,エ,オ (4)	ア (19)	オ (5)	ア,エ,オ (5)
(2)	イ,オ	24	1	オ (24) イエオ (4)	ア (12) ア,エ (3)	エ (11) アオ (3)	エ,オ (8)
(3)	オ	55	0	ア (20) ウ (4)	エ (8)	イ (5)	ア,オ (5)
2 ア	○	95	0	× (5)			
イ	○	97	0	× (3)			
ウ	×	96	0	○ (4)			
エ	×	79	0	○ (21)			
オ	×	84	0	○ (16)			
3 (1)	8	73	5	−4 (9)	−8 (3)	−3 (3)	
(2)	$-\frac{10}{3}$	59	15	$\frac{10}{3}$ (4)	$\frac{3}{10}$ (4)	$-\frac{3}{10}$ (3)	−10 (3)
(3)	−3	88	3	2 (4)			
(4)	2	93	0	−3 (5)			
(5)		79	5	傾きが逆 (4)			
(6)	−9	35	8	−7 (15) 2 (5)	9 (11) −6 (4)	3 (9) 7 (3)	6 (7)
4 x	8	85	3	9 (4)	7 (3)		
y	17	91	3	15 (5)			
5 (1)	$y=3x+5$	71	7	$y=3x+2$ (5)	$y=5x+3$ (4)		
(2)	$y=4x-2$	59	11	$y=3x-2$ (11) $y=6x-2$ (3)	$y=-2x+6$ (3)	$y=-4x-2$ (3)	$y=2x+4$ (3)
(3)	$y=-\frac{3}{4}x+3$	47	12	$y=\frac{3}{4}x+3$ (15)	$y=-\frac{3}{4}+3$ (5)	$y=4x+3$ (4)	$y=4x-3$ (3)
(4)	$y=-2x+18$	45	19	$y=-2x+2$ (5)	$y=3x-2$ (5)		
(5)	$y=2x+1$	55	17	$y=3x+3$ (3)	$y=3x+1$ (3)	$y=2x$ (3)	
6 (1)	ア,ウ,オ	59	1	アイウオ (15)	アウ (9)	アイウ (7)	エ (3)
(2)	4	83	7	8 (3)	2 (3)		
(3) $y=$	$2x$	71	9	$y=4x$ (4)	$y=\frac{x}{2}$ (3)	$y=x+1$ (3)	
$\leqq x \leqq$	0, 7	67	15	0, 4 (7)	4, 7 (4)		
$\leqq y \leqq$	0, 14	60	20	2, 14 (7)	0, 7 (5)		

② 問題別考察

問題1について

(1) ④ $x=3y$ をぬかす生徒が24%いる。これは $y=$ □ という関数の式に慣れているため等式変形をして $y=\frac{1}{3}x$ にすることに気がつかないためであろう。$x=3y$ と $y=\frac{1}{3}x$ が同じであることが理解されていない。

(2) ㋓だけを選んで誤答となった生徒(④をぬかした)が24%いる。理由は(1)の考察と同じであろう。

㋐または㋐㋓を選んだ生徒が15%いる。右上がりの直線は $y=ax+b$ の a がプラスと理解していない。

(3) ㋐を選んだ生徒が20%もいる。x 軸上の−2と y 軸上の3を見て、$y=-2x+3$ としたのか、または"平行"ならば切片は等しいと考えた(切片と傾きの混乱)のか。

(1),(2),(3)については、全問正解の生徒は16%しかいなかった。正解が前問の正解の一部になっているが、我々の意図した解答をした者は少なかった。生徒1人1人の解答を調査し、そのとらえ方をさぐる必要がある。

問題2について

56年6月1回目の調査は、○,×ではなく1次関数を選び出させる方法をとった。(山形大会資料参照)すべてを選び出した生徒は6%で、調査のねらいを達成できなかったので、今回の問いかけに変えた。今回の結果は68%の生徒が全問正解であった。さらに、曲線は1次関数でないことは、大部分の生徒は理解していることが言える。しかし、軸に平行な直線㋓㋔を選び、「直線=1次関数」と考えている生徒は11%いた。

問題3について

(1) 誤答の−4(9%)は、$-3\times2+2=-4$, $-6+2=-(6-2)=-4$ としたのだろう。正、負の数の計算の間違いが誤答につながっている。

(2) 思ったよりは、正答率が低かった。代入してyからxを求める指導展開が少ないせいもある。

(3)(4)では、傾きと切片を逆にとらえている生徒がいる。

(6) $x=3$のときのyの値を求め-7と答えた生徒が15%もいた。また、符号を考えないで増加量を求めた生徒が11%いた。この内容はxが1増加したらyは-3増加，2なら-6、3なら-9のように、丁寧な指導が必要な所である。

問題4について

第1回の調査で表を

x	1	2	5	□
y	5	8	□	26

とし、xの値は47%、yの値は48%と正答率が低かったので、問題の表現を工夫してみた。表からxの値が1増加するとyの値は3増加することに目をつけ、x、yの値を求めたのであろう。しかし、「1次関数＝変化の割合が一定」ということを理解した上での解答かは、検討の余地がある。また、表から式を求める問題を入れた調査もしたい。

問題5について

(1) 切片と傾きを逆にした生徒が4%いる。

(2) $y=ax-2$と式をつくれるが、aの求め方の違いによる誤答が17%である。$y=3x-2$の誤答(11%)は、点(2,6)を通ることから比例式を求めるように$6\div2=3$で傾きを求めたのであろう。

(3) 傾きが正($\frac{3}{4}$)の誤答が15%いる。「右下がりの直線だから$y=ax+b$のaは負である」ことを意識させたい。

(4)(5)では、無答率が高かった。1次関数の式、(軸に平行でない)直線の式と言われたら$y=ax+b$のaとbが決まればよいことをおさえておきたい。

問題6について

(1) 「変わるもの」という問いかけに対し、ア・イ・ウ・オとした生徒が15%いる。イは形が変わると単純に考えたのか、ま

たは形が変わることによって面積が変わると考えたのか、2通りが考えられる。

(3) 式を求めるとき$\frac{1}{2}$をかけ忘れた生徒が4%いた。変域の問いでは、その意味がつかめていないためか、無答が多い。

③ 全体をながめてみて

。 式をみて、1次関数かどうか判断するのはむずかしい。

。 変化の割合の意味や利用価値が理解されていない。この内容は、いろいろな角度から繰り返し指導を行いたい。

。 式の決定はむずかしい。もっと理解させておきたい。ドリル面が強い内容だが、「式が決定できた＝関数がわかった」というのではないので、必要以上に複雑な問題を与えることはないであろう。形式的な指導に流されず、具体的な事象と問題5のような問いとの対応を指導の中に入れていきたい。

。 変域についての理解がされにくい。具体例の中で考えさせ、常に変域を意識させる指導が望まれる。

第3学年

(1) 評価の観点

＜1＞ 2乗に比例する関数とそのグラフ

① $y=ax^2$のグラフがわかるか。

② $y=ax^2$で、aの符号や絶対値の大きさによって、増減等の特徴が判断できるか。

③ 1組のx, yの値が与えられたとき、式$y=ax^2$が決定できるか。

④ 変化の割合が求められるか。

⑤ 変化の割合が一定でないことがわかるか。

⑥ 変化の割合の符号や絶対値の大きさによって、変化の様子がわかるか。

＜２＞　２乗に反比例する関数とそのグラフ
①　$y=\frac{a}{x^2}$　のグラフがわかるか。
＜３＞　いろいろな事象と関数
①　具体的な事象で、伴なって変わる２つの数量の関数関係を式やグラフに表せるか。
②　定義域、値域がわかるか。

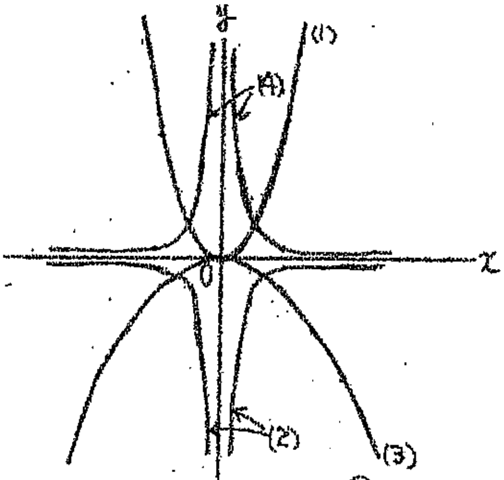
(2)　評価問題　　　　　　　　　　　［評価の観点］

1. 右の図は、４つの関数のグラフを同じ座標軸を使ってかいたものである。
(1)〜(4)のグラフは、どんな関数か。その関数の式を、下の㋐〜㋔の中から選べ。

㋐　$y=\frac{2}{x^2}$　　㋑　$y=2x^2$　　㋒　$y=2x$

㋓　$y=-\frac{1}{2}x^2$　　㋔　$y=-\frac{2}{x^2}$

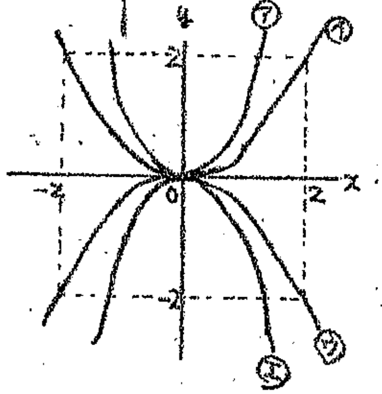
［＜1＞①
＜2＞①］



2. (1)　右の図で、関数 $y=-x^2$ のグラフはどれか。㋐〜㋓の中から選べ。

(2)　右の図で、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフはどれか。㋐〜㋓の中から選べ。

［＜1＞②］



3. yはxの2乗に比例し、$x=6$のとき$y=12$である。次の問に答えよ。

(1) yをxを用いた式で表わせ。 [<1>③]

(2) $x=3$のとき、yの値を求めよ。

4. 関数 $y=2x^2$ について、xの値が2から5まで増加するときの変化の割合を求めよ。 [<1>④]

5. 次のそれぞれにあてはまる関数を、下の㋐～㋕の中から選べ。

(1) 変化の割合が一定であるもの。 [<1>⑤]

(2) xの値が2から5まで増加するとき、yの値も増加するもの。 [<1>⑥]

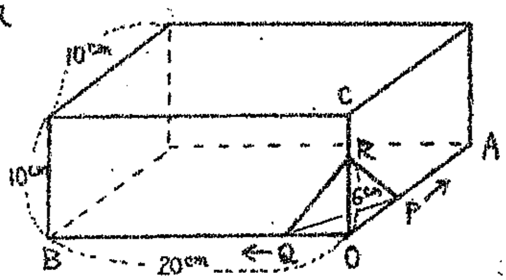
(3) xの値が2から5まで増加するとき、yの増加量が最も大きいもの。 [<1>⑥]

㋐ $y=-2x$　　㋑ $y=3x-1$　　㋒ $y=-x^2$

㋓ $y=2x^2$　　㋔ $y=3x^2$　　㋕ $y=-\frac{1}{2}x^2$

6. 右の図のように、縦、横、高さが、それぞれ10cm、20cm、10cmの直方体がある。

点P、Qは同時にOを出発して毎秒1cmの速さで、点Pは辺OA上をAまで、点Qは辺OB上をBまで動く。（点PがAに到達しても、QはBに到達するまで動く。）また、点Rは辺OC上で、OR=6cmの位置に停止している。



三角すいO-PQRの体積をVで表すとき、次の問に答えよ。 [<3>]

(1) P、QがOを出発してから3秒後の体積Vを求めよ。

(2) P、QがOを出発してからx秒後の体積Vをy cm³とする。

① $0 \leqq x \leqq 10$のとき、yをxを用いた式で表せ。

② $10 \leqq x \leqq 20$のとき、yをxを用いた式で表せ。

(3) (2)のxとyの関係をグラフに表せ。ただし、定義域は$0 \leqq x \leqq 20$とする。

(4) 16秒後の体積Vを求めよ。また、体積Vが、50cm³になるのは何秒後か。

(3) 結果の分析

① 正答率

調査時期　昭和55年3月　　調査時間 40分
調査対象　東京都公立中学校 3年生 116名 (2校3クラス)

問題番号	正答	正答率 %	無答率 %	おもな誤答例 (誤答率 %)				前回正答率 %
1.(1)	イ	89	1	ア (6)	ウ (2)	オ (2)		86
(2)	オ	77	3	エ (9)	ア (6)	イ (4)		80
(3)	エ	84	1	オ (7)	ア (5)	イ (2)		84
(4)	ア	78	1	オ (9)	ウ (5)	イ (3)	エ (3)	79
2.(1)	エ	75	0	ウ (17)	ア (5)	イ (3)		76
(2)	イ	79	0	ア (17)	エ (3)			83
3.(1)	$y=\frac{1}{3}x^2$	71	3	$y=x^2$ (6)	$y=2x^2$ (4)	$y=3x^2$ (3)	$y=2x$ (3)	58
(2)	3	72	4	6 (8)	9 (4)	27 (3)		50
4.	14	71	11	$8\leqq y\leqq 50$ (4)				61
5.(1)	ア,イ	68	4	イ (7)	ア (5)	エ (3)		63
(2)	イ,エ,オ	61	7	エオ (17)	エ (3)	イ (3)	カ (3)	59
(3)	オ	84	4	イ (3)	ウ (3)			81
6.(1)	9	70	7	27 (10)	18 (8)			52
(2)①	$y=x^2$	52	15	$y=2x^2$ (7)	$y=3x^2$ (6)	$y=10x^2$ (5)	$0\leqq y\leqq 100$ (3)	40
②	$y=10x$	42	21	$y=20x$ (3)	$y=30x$ (3)	$y=20x^2$ (3)	$y=x^2$ (3)	29
(3)		31	35					22
(4)①	160	49	16	480 (7)	320 (5)	256 (5)		40
②	$5\sqrt{2}$	49	22	5 (10)				38

② 問題別考察

問題1について

(2)をエとした誤答は9％、(3)をオとした誤答は7％であった。なお、(2)をエとし、(3)をオとした生徒は5％であった。これらの生徒は、$y=ax^2$と$y=\frac{a}{x^2}$のグラフは、aの符号がマイナスならば、x軸の下側になることは理解できている。

また、(2)をアとし、(4)をオとした生徒は5％いた。これらの生徒は、$y=\frac{a}{x^2}$のグラフの形はわかっているが、aの符号によって、グラフがx軸の上側か下側かの判断はできていない。

問題2について

(1)をウとし、(2)をアとした誤答は13％である。$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフの方が$y=x^2$のグラフより閉じていると考えられる。

また、(1)で、ウまたはエを選んだ生徒92％のうち、(2)で、アとイ以外のものを選んだ生徒は1％しかいない。つまり、91％の生徒は、aの符号によって、グラフがx軸の上側か下側かになることを判断できている。しかし、これらの生徒のうち、(1)で16％、(2)で12％の生徒は、グラフの開き具合を、数値をあてはめて決定することはできていない。

問題3について

(1)の誤答の中で、$y=ax^2$の形の式を答えた生徒は16％であった。したがって、87％の生徒は、「2乗に比例」から$y=ax^2$の式になることが理解されている。

問題4について

いろいろな誤答が出た。いずれも2％以下の少数であるが、たとえば、「42」のように、$2\times5^2-2\times2^2$としてxの増加量を求めたり、「12」のように、$\frac{42}{3}=12$とした計算まちがい、「7」のように、$\frac{5^2-2^2}{5-2}$として$y=x^2$の場合を求めたり、「2」のように、$y=2x^2$の係数を答えたり、いろいろであった。中には、yの変域を答える者が4％いた。正答率は71％とまずまずだが、これらの誤答を見ると、「変化の割合」の意味は、まだ十分に定着していないといえよう。

問題5について

式の形から、変化の割合やx, yの増加のしかたを判断するのは難しいようだ。(2)では、㋓㋔として、$y=3x-1$を選び忘れた生徒が、17%とかなりいた。また、(2)で㋔を選ばないにもかかわらず、(3)で正解となる生徒が10%もいた。(2)(3)の両方とも正解だった生徒は60%で、(2)の正解の61%とほぼ一致する。したがって、(2)が正解である生徒は、x、yの変化の様子について理解していると見なしてよいであろう。

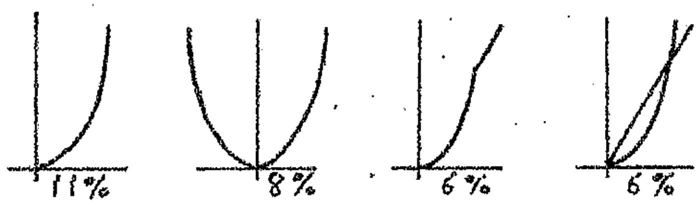
問題6について

(1)の誤答で、三角すいの体積、三角形の面積を求めるときに、$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$をかけ忘れた生徒が18%もいた。したがって、公式を正しく使用すれば、(1)の正答率は88%となり、問題の意味は、ほぼ理解できているといえよう。

(2)①------(1)と同じような誤答が13%、変域を答えた生徒が8%おり、

②------(1)と同じような誤答が7%($y=60x$も含む)、変域を答えた生徒が7%いた。

(3)でのおもな誤答例は、右の通りである。



無答率35%、正答率31%から見て、グラフを書くことは、かなりむずかしい。変化の様子が途中から変わっていくことや目もりの取り方で多くの誤答が出た。

(4)①------正答率が49%で、(2)②の42%より7%あがっている。これは、式に代入し計算したり、グラフを用いたりしなくても、もう一度、問題にもどって考えなおせばよいことを生徒がわかっていたためであろう。また、(1)と同じような誤答が12%あり、$y=x^2$に$x=16$を代入し、「256」とした誤答が5%であった。このことから、6～7割の生徒は、正しく考察できているといえよう。

②------誤答「5」とした生徒10%のうち6%は、(2)①で$y=2x^2$

と答えており、式を使って解答しようとする姿勢がうかがえる。また、残り4%は、$x=10$のとき$y=100$だから、体積が$50cm^3$になることは、$y=100$の$\frac{1}{2}$になると考えて、$x=10\times\frac{1}{2}=5$としたのではないだろうか。

③ 前回との比較

正答率は、全体的によくなっているといえよう。

問題4は、充分な正答率とはいえないが、前回よりもよくなった所である。変化の割合を単に公式計算するだけでなく、右のように表を用いて、ていねいに計算させる指導を行った成果と考えられよう。

$y=2x^2$

x	2	5
y	8	50

xの増加量 3、yの増加量 42

変化の割合 $=\frac{42}{3}=14$

問題6は、指導展開例第7、8時（P.17〜P.20参照）の指導をうけての問題であるが、他の問題に比べ、無答率が高く、生徒にとってむずかしいものであると考えられる。今回の結果は、前回より無答率が低くなり、正答率は、いずれも10%ほどよくなっている。これは展開例に沿った指導の成果であろう。我々は、点が動いたときに変化するものをとらえ、関数関係を正しくつかむことは重要なことであると考えている。

④ 全体をながめて

○ $y=ax^2$のグラフは、aの符号がマイナスの場合、x軸の下側にあるとわかっている。だが、グラフの開き具合、増加減少の緩急などまで問われると、aの符号・絶対値の大きさや代入計算のような解決の目のつけ所がつかめていないため、式だけで処理することが難しいようだ。

○ $y=ax^2$, $y=\frac{a}{x^2}$などでは、式とグラフの形とが結びついていないために起こる混乱が多い。

○ 変化の割合については、その定義と内容の理解が不十分である。変化の割合と、x、yの増加量、式の形、グラフは、相互に

かかわりを持っているという統合された見方ができていないためと考えられる。

。 具体的な事象で関数関係を考察できるようになってきたが、式に表したりすることはまだ不十分である。具体的な事象で関数関係をとらえることは、生徒にとってたいへん難しい。できるだけ具体的な事象について問題解決をはかるていねいな指導が必要であろう。

3. 今後の課題

(1) 指導展開例の実践をもとに、より生徒の実態に即した指導計画を作成し、よりよい指導展開案となるよう検討を行う。

(2) 評価の観点を再検討し、それをもとに、より適切な評価問題を作成する。

(3) 生徒の実態の考察をすすめ、関数指導におけるポイントを明確にし、中学三年間を通した、関数指導の系統案を作成する。さらに、現在の関数教育の問題点をさぐり、いくつかの提言をしたいと思っている。

―都中数研　研究部　関数委員会―

居駒永信	新宿区立戸塚一中	岩木敬二郎	板橋区立中台中
牛場正則	足立区立第十六中	遠藤国雄	板橋区立赤塚二中
小澤慶晃	多摩市立多摩中	小嶋淳一	文京区立文京六中
風間喜美江	江東区立第二大島中	岡宗　健	品川区立伊藤中
五島芳夫	港区立三河台中	坂本和良	新宿区立淀橋二中
須藤哲夫	品川区立東海中	瀬谷洪咏	文京区立文京十中
橋爪昭男	品川区立荏原二中	藤田誠二	板橋区立赤塚二中
中西知真紀	世田谷区立深沢中		