第６９回　日数教全国大会（福岡）研究発表資料　１９８７．８

関数の導入および利用の指導について

東京都中学校数学研究会　研究部　関数委員会

もくじ

１　研究の経過とねらい

現行の学習指導要領が告示されてから９年が経過し、その改訂についての現場からの意見も、ようやく聞かれるようになってきた。

この10年間、本関数委員会では、中学校関数についての具体的・実践的な指導計画や指導案を作成し、それらを授業研究を通して実証的に検討してきた。また、各学年における評価問題を作成、実施し、その結果の検討を行って、特に生徒の理解が不十分な内容については、授業研究を通して指導計画や指導案を再検討し修正を重ねてきた。さらに、小学校における比例、反比例の指導内容との関連も考えた。

なお、これまでの研究内容はその都度、日数教全国大会（東京、山形、岡山、埼玉、福井、奈良、東京)、日数教関ブロ大会（東京、千葉、神奈川、長野、宇都宮、水戸)、東京都中数研発表大会において報告している。

一昨年度までの研究によって、現行教育下における中学校での関数指導については、一応のまとめをみている。［“中学校での関数指導について（その１）、（その２）”日数教学会誌数学教育　第68巻11号、第69巻１号　参照］

また、一昨年度からは、これまでの研究成果を踏まえて、本委員会なりに中学校での関数カリキュラムについての問題点を明らかにし、それに検討を加えている。

以上の経過を踏まえて、今年度は、次のことをねらいとして研究を進めた。

（１）　中学校での関数カリキュラムについての提言を行う。

（２）　各学年ごとに、関数の導入時の指導と、関数の考えを使った課題解決時の指導（関数の利用）について、課題の開発を含めて検討すること

2　研究の内容

Ⅰ関数カリキュラムについて

本研究は、昭和51年度からの継続研究である。これまでの考察から我々は、中学校における関数指導について、次のような指導過程をとるべきであるとの結論を得るに至っている。

多くの変量を取り出せる具体的な課題を提示する。

→その中の2変量の関係について調べる。

その際、「変化のようすをとらえる」、「対応の規則を調べる」という視点を重視する。

→ひととおりの指導を終えたところで、関数の考えを使って課題解決をさせるための時間を設定する。

この指導過程は、現行学習指導要領に従っての指導について考察する中で得られた結果であるが、関数指導のねらいから検討しても妥当なものであると思われる。

ところで、中学校における関数指導の歴史が浅いこともその理由の1つであろうが、関数についての指導内容は、学習指導要領の改訂のたびに大きく揺れ動いている。

そこで、次期学習指導要領の改訂に対する中学校現場からの意志表示として、これまでの研究を踏まえて、本委員会なりに中学校における関数カリキュラムについての提言、あるいは問題点の指摘をし、それに基づいた指導計画を明示することにする。指導計画の作成にあたっては、先に述べた指導過程をとるように配慮したことは言うまでもない。

なお、今回の提言の内容は、一昨年度の日数教奈良大会中学校部会、昨年度の日数教東京大会中学校部会、関ブロ水戸大会小学校部会での発表の際の参会者の意見も検討してのものである。

（1）　提言

① 小学校における比例、反比例の指導では、

比例は、「一方が2倍、3倍、…になると、他方も2倍、3倍、…になる」、

反比例は、「一方が2倍、3倍、…になると、他方は1/2倍、1/3倍…になる」

ことを明確におさえることに重点をおいて指導してほしい。

b＝（決まった数）×a　　　b＝（決まった数）÷a　　　…（＊）

のような式により一般的に表現することは扱わない。

☆　プレテストの結果によれば、

一方が増えると他方も増えるものが比例、

一方が増えると他方は減るものが反比例、

と誤って理解している生徒が多い。

小学校において取り扱われる文字a，bやx，yは、具体的な数量を表してい

るものであり、一般的な変数として取り扱われるわけではない。比例、反比例について（＊）のようなまとめまで取り扱うことは、児童に負担をかけ、比例、反比例の理解を深めることにはならない。

② 小学校でのグラフ指導については、グラフの意味やかき方の理解を深めることを指導の中心とし、比例、反比例のグラフとしての特徴などには深入りしないでほしい。

☆ プレテストの結果によれば、和が一定のグラフを反比例、差が一定のグラフを比例と判断する誤りが多い。グラフの概形を見せるだけに終わる傾向があるからではないか。

③ 反比例を中学校第１学年の指導内容から削除し、それを第３学年での「いろいろな関数」のところで取り扱う。

第１学年での指導の中心は、関数 $y=ax$ についての考察とする。

☆ 「関数 $y=ax$ から１次関数 $y=ax+b$ へ」の流れを重視する。

第１学年では、関数 $y=ax$ 以外の簡単な関数も具体的な事象を用意して取り扱い、関数 $y=ax$ の変化や対応の特徴をより明らかにすることをねらいとする。

反比例は分数関数の範ちゅうである。第３学年で、放物線の指導の後に双曲線を扱うことになるから、反比例のグラフの指導が容易になり、反比例についての指導時数を減らすこともできる。

④ 第３学年で、関数 $y=ax^2$ を２次関数 $y=ax^2+bx+c$ の特別な場合として位置づけて扱う。

☆ 「１次関数から２次関数へ」の流れを重視する。

⑤ 第３学年の「いろいろな関数」では、具体的な事象について考察する。その事象で扱われる関数は、式で表されるものについては、$y=ax^3$、$y=a/x$、$y=a/x^2$ などの式で表される程度とする。

☆ 具体的な事象について考察する中で、これらの関数を扱うことを前提とする。つまり、ここでは、関数の式の形によるのではなく、具体的な事象を中心にした考察を行うことを目指す。それによって、関数的な考察の方法についての理解を深めることをねらいとする。

⑥ 第３学年での指導内容から、定義域、値域の用語を削除する。

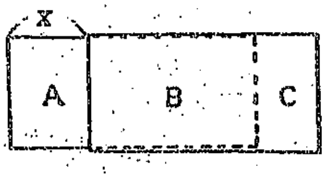
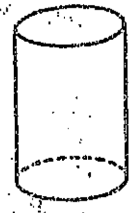
☆ それぞれ、x の変域、y の変域で十分である。

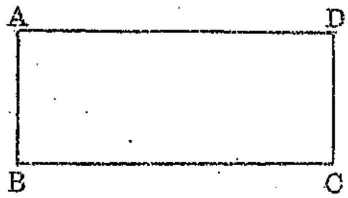
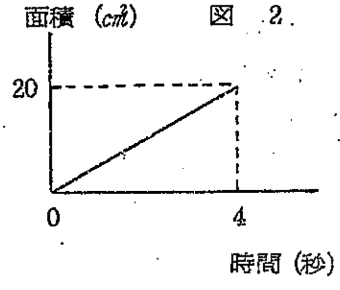
なお、関数の定義をどうするかが問題点である。現在のところ本委員会では、第１、第２学年では「決めれば決まる」で通し、第３学年で今まで通り、定数値関数や階段関数を扱う前に対応による関数の定義を行うとよいと考えている。

（２）　各学年の指導計画

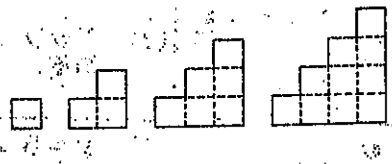
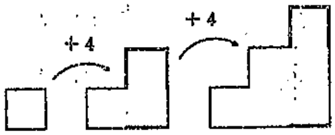
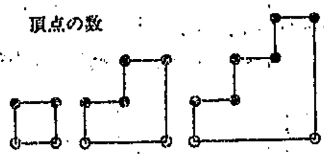
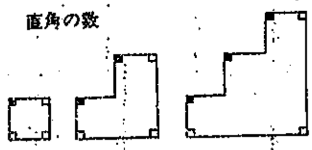
（１）での提言の内容を具体化するために、一昨年度までに作成した指導計画をもとに、また、後のⅡで述べる授業研究に基づいた検討の結果も考え合わせて、次のような各学年ごとの指導計画を立案した。

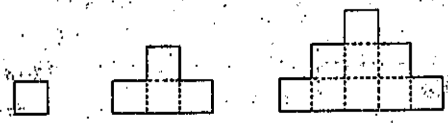
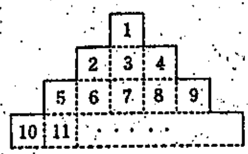
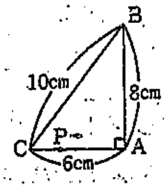
１．第１学年の指導計画　（９時間）

時数	項目	指導内容
1	変化と関数	［課題］　封筒から画用紙を引き出してゆく。  (1)　変化する量・変化しない量をあげる。 ［1］　引き出した長さと周囲の長さとの関係を調べる。 $y=2x+64$ ［2］　引き出した長さとAの部分の面積との関係を調べる。  $y=12x$ (2)　「変数」を定義する。
2		［3］　引き出した長さと全体の面積との関係を調べる。 $y=240+12x$ ［4］　引き出した長さとBの部分の面積との関係を調べる。 $y=240-12x$ (1)　「yはxの関数である」ことを定義する。 (2)　「変域」を定義する。
3	関数 $y=ax$	(1)　２つの変数 x，y の間に、$y=2x$，$y=-3x$ という関係があるとき、x，y の変化の様子を調べる。 (2)　「yはxに比例する」ことを定義する。
4	（式の決定）	(1)　右の図のような円柱状の空の容器に、一定の割合で水を入れたところ、３分後 に ６cm の深さまで、水が入った。x分後 の水の深さを ycm として、yをxの式で表す。  $y=2x$ (2)　いくつかの具体的な事象について比例の関係を確かめる

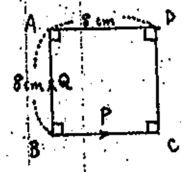
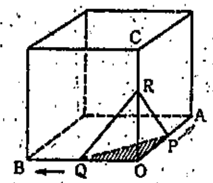
5	関数 $y=ax$ のグラフ	(1)　$y=2x$ のグラフをかく (2)　グラフをかくときに座標の考え方が有効であることを知る。
6		(1)　$y=3x$、$y=-3x$ のグラフをかく。 (2)　$y=ax$ のグラフから変化をよみとる。 (3)　$y=ax$ のグラフの特徴をまとめる。
7		(1)　原点と他の１点で $y=ax$ のグラフをかく。 (2)　グラフから式を求める。
8	関数の利用	〔課題〕（条件１） 図１のようなＡＢ＝10cm，ＢＣ＝24cmの長方形がある。２点Ｐ，Ｑは辺ＢＣ上を動くものとする。ただし、点Ｐは毎秒３cmの速さで頂点Ｂを出発し頂点Ｃまで動く。 図　１  （条件２） また、図２は点ＰがＢを出発してから４秒までの時間と△ＡＰＱの面積との関係を表したグラフである。 図　２  このとき点Ｑはどのように動いたか。
9	問題練習	

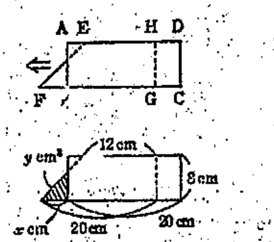
2．第2学年の指導計画　（13時間）

時数	項　目	指　導　内　容
1	1次関数の意味	［課題］　1辺の長さが1cmの正方形の紙を階段の形に積んでいく。  ①　ともなって変わる量をあげる。 ［Ⅰ］階段の数がx段のときの周囲の長さをy cmとして、その変化のようすを調べる。  ②　表、グラフ、式（$y=4x$）を求める。 ③　$y=4x$で、定数4の意味を考える。
2		［Ⅱ］階段の数がx段のときの頂点の数をy個として、その変化のようすを調べる。  ［Ⅲ］階段の数がx段のときの直角の数をy個として、その変化のようすを調べる。  ①　「yはxの1次関数である」ことを定義する。
3	1次関数の値の変化とグラフ	①　$y=2x+3$、$y=-5x+4$　について、変化のようすを調べる。 ②　「変化の割合」を定義する。 ③　1次関数についての変化の割合の特徴をまとめる。
4		①　$y=2x+3$、$y=2x$　のグラフをかく。 ②　$y=-2x+4$、$y=-2x$　のグラフをかく。 ③　1次関数のグラフと比例のグラフとの関係を調べる。 ④　「切片」を定義する。
5		①　$y=2x+3$、$y=-2x+4$　のグラフの傾きぐあいを調べる。 ②　「傾き」を定義する。 ③　1次関数$y=ax+b$で、$a>0$のときと$a<0$のときの変化のようすの違いを調べる。
6		①　$y=2x+1$、$y=\frac{2}{3}x+1$、$y=-\frac{1}{2}x+3$　のグラフを、傾きや切片を使ってかく。 ②　グラフが平行になるときの変化や式の特徴を調べる。 ③　1次関数のグラフの特徴をまとめる。

7	1次関数を求める	［課題］　縦1cm、横2cmの長方形を右の図のように積んでいく。  ①　ともなって変わる量をあげる。 ［Ⅰ］階段の数がx段のときの周囲の長さをycmとして、yをxの式で表す。（$y=4x+2$） ②　各自、どのように式を求めたかを発表させる。 ③　1次関数の式は、変化の割合aと1組のx、yの値から、また、2組のx、yの値から求められることをまとめる。
8		（1次関数の式の決定についての問題練習）
9		（測定値の資料などから1次関数を求める。－実験式）
10	1次関数の利用	［課題］　1辺が1cmの正方形を、右の図のように1段ずつ順に並べ加えて図形をつくる。  ［Ⅰ］階段の数がx段のときの周囲の長さをycmとして、yをxの式で表す。（$y=6x-2$） ［Ⅱ］x段目にある数字の個数をy個として、yをxの式で表す。（$y=2x-1$） ［Ⅲ］x段目の右端にくる数字をyとして、yをxの式で表す。（$y=x^2$） 
11		［課題］　右の図のような△BCA（∠A＝∠R）がある。点PはCを出発して、毎秒1cmの速さでAを通ってBまで動く。  ①　ともなって変わる量をあげる。 ［Ⅰ］点PがCを出発してからx秒後のときの△BCPの面積をycm^2として、変化のようすを調べる。（変域に注意させる。）
12 13	問題練習	

3．第3学年の指導計画　（13時間）

時数	項　目	指　導　内　容
1	2次関数	［課題］　1辺が8cmの正方形がある。その辺上を2点P、Qが同時に頂点Bを出発して、それぞれ毎秒2cmの速さで頂点Dまで動く。  変化するものをあげなさい。 ［Ⅰ］時間と面積（△PQB、五角形PQABC）との関係を調べる。 $0 \leqq x \leqq 4$ のとき、$y = 2x^2$ $4 \leqq x \leqq 8$ のとき、$y = -2x^2 + 32x - 64$
2		①　$y = 2x^2$、$y = -4x^2$　について、xの値がn倍になるときyの値はn^2倍になることを確かめる。 ②　具体的な例（立方体の表面積、高さ一定の正四角柱の体積など）について立式する。
3	関数 $y = ax^2$の	①　$y = x^2$、$y = -x^2$のグラフをかく。 ②　$y = x^2$、$y = -x^2$のグラフの特徴をまとめる。
4	グラフ	①　$y = x^2$のグラフをもとに、$y = 2x^2$、$y = \frac{1}{2}x^2$のグラフをかく。 ②　$y = -x^2$のグラフをもとに、$y = -2x^2$、$y = -\frac{1}{2}x^2$のグラフをかく。 ③　$y = ax^2$のグラフの特徴をまとめる。
5	変化の 割合	①　1次関数$y = 2x + 4$の変化の割合の意味を、表やグラフで復習する。 ②　$y = x^2$について、変化の割合を調べる。
6		①　$y = -2x^2$について、変化の割合を調べる。 ②　変化の割合のグラフ上での意味を考える。
7	問題練習	（自然落下も扱う。）
8	いろいろな 関数（1） （式で表す）	［課題］　右の図のような1辺が10cmの立方体の辺OA、OB、OC上をそれぞれ点P、Q、Rが動く。これらの点が頂点Oを出発してからx秒後の三角すいO－PQRの体積をy cm^{3}として、xとyとの関係を調べる。  ［Ⅰ］2点Q、RはOQ＝4cm、OR＝6cmの位置に停止しており、点PはOを出発して毎秒1cmの速さで動く。　（$y = 4x$）

		[Ⅱ] 1点RはOR＝6cmの位置に停止しており、2点P、Qは同時にOを出発して毎秒1cmの速さで動く。　($y=x^2$) [Ⅲ] 3点P、Q、Rは同時にOを出発して毎秒1cmの速さで動く。　($y=\frac{1}{6}x^3$) [Ⅳ] 1点RはOR＝6cmの位置に停止しており、1点Pは毎秒1cmの速さで動き、点Qは三角すいO－PQRの体積が6cm³で一定になるように動く。x秒後のOQの長さがycm ($y=6/x$) [Ⅴ] 2点P、Qは同時にOを出発して毎秒1cmの速さで動き、点Rは三角すいO－PRQの体積が1/6cm³で一定になるように動く。x秒後のORの長さがycm　($y=1/x^2$)
9	(変化を調べる)	① Ⅲ、Ⅳ、Ⅴについて、表をつくりyの値の変化のようすを調べる。 ② $x<0$の場合も調べる。 ③ 例えば、$1\leqq x\leqq 2$での変化の割合を調べる。
10	(グラフを調べる)	① Ⅲ、Ⅳ、Ⅴについて、表からグラフをかき、変化のようすを調べる。 ② $y=x^3$、$y=12/x$、$y=12/x^2$のグラフもかき、それらのグラフの特徴を調べる。 ③ 対応による関数の定義をする。
11	いろいろな関数(2)	① ある私鉄の運賃は、6kmまでは110円で、その後4km進むごとに20円増す。(ただし、この私鉄の始発駅と終着駅との道のりは86kmである。)乗車距離と料金との関係を調べる。 ② ある私鉄が経営する循環バスの料金は、一律160円で、一循環の道のりは5kmである。乗車距離と料金との関係を調べる。 ③ xを1けたの自然数とする。xを3で割ったときの余りをyとして、xとyとの関係を調べる。
12	関数の利用	[課題] 右の図のように、長方形ABCDの封筒から、台形EFGHの画用紙を引き出していく。 ① ともなって変わる量をあげる。 [Ⅰ] 画用紙をxcm引き出したときの引き出された部分の面積をycm²として、xとyとの関係を調べる。 
13	問題練習	

Ⅱ　「関数の導入」および「関数の利用」の指導について

（1）「関数の導入」の課題について

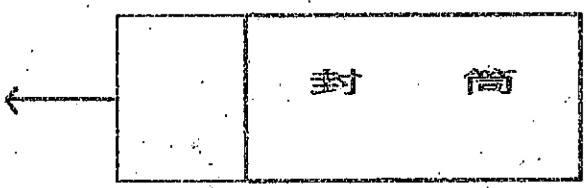
各学年における「関数の導入」の課題を考えるにあたっては、次のような観点で開発することを心がけてきた。

1）具体的な場面から、生徒自らが多くの変量を取り出すことができる課題。
2）生徒が見い出した幾つかの変量の中の２量を取り出し、その関数関係について、表、グラフ、式などから、その特徴をとらえ、それ以降の学習につなげることができる課題。
3）各学年において学習すべき関数以外のものも取り上げることができる課題。
4）場面を視覚的にとらえることができる課題。
5）身近にある素材による課題。

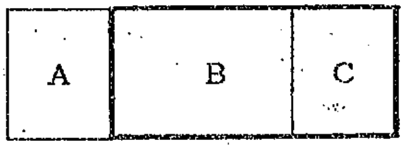
◎第１学年の「関数の導入」の課題（昭和５５年、東京大会において発表）

課題

封筒から画用紙を
引き出していく。



① 変わるものをあげる。
（ア、封筒と画用紙を一体としてとらえる。）
（イ、封筒と画用紙を別個のものとしてとらえる。）
② 変わらないものをあげる。
<u>引き出した長さと周の長さの関係について調べる</u>
③ 画用紙を0cm，1cm，2cm，3cm・・・と引き出していくときの周の長さを求める。
④ 表にまとめる。
⑤ 表から気づくことをあげる。



※「変数」を定義する。
<u>引き出した長さとAの部分の面積の関係について調べる。</u>
⑥ 画用紙を０cm，１cm，２cm，３cm・・・と引き出していくときのAの部分の面積を求める。
⑦ 表にまとめる。
⑧ 表から気づくことをあげる。
⑨ 面積が１２cm² ずつ増えることの意味を考える。
⑩ 引き出した長さをxcm，このときのAの部分の面積をycm² として、yをxの式で表す。

◎第２学年の「関数の導入」の課題（６ページ参照）
「階段」を扱った課題。
◎第３学年の「関数の導入」の課題（大会特集号参照）
「三角形」を扱った課題。
「動点」を扱った課題。
「斜面」を扱った課題。

（２）「関数の利用」の課題について

各学年における「関数の利用」の課題を考えるにあたっては、次のような観点で開発することを心がけてきた。

1）今まで学習してきたことを総合的に利用して解決できる課題。

2）具体的な場面から、生徒自らがいろいろな課題やその解決の仕方を生みだすことができる課題。

3）グラフ、表、式、変化や対応、変域などの見方や考え方をよりいっそう深めることができる課題。

4）身近にある素材で、場面を視覚的にとらえることができる課題。

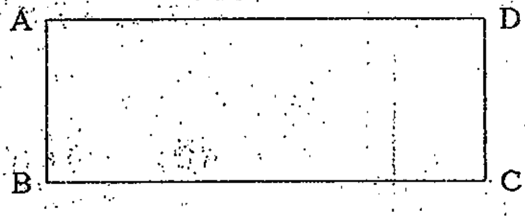
◎第１学年の「関数の利用」の課題（１２～２１ページ参照）

課題

（条件１）

図1のようなＡＢ＝１０ｃｍ、ＢＣ＝２４ｃｍの長方形がある。点Ｐ、点Ｑは辺ＢＣ上を動くものとする。ただし、点Ｐは毎秒３ｃｍの速さで頂点Ｂを出発し頂点Ｃまで動く。

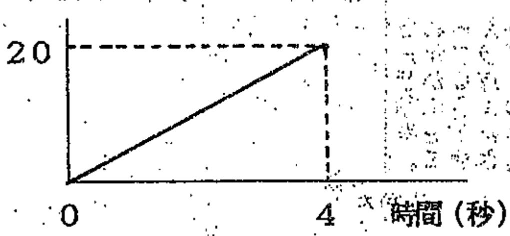
図　1



（条件２）

また、図2は点ＰがＢを出発してから４秒までの時間と△ＡＰＱの面積との関係を表したグラフである。

図　2



このとき点Ｑはどのように動いたか。

◎第２学年の「関数の利用」の課題（７ページ参照）

「両側の階段」を扱った課題。

「動点」を扱った課題。

◎第３学年の「関数の利用」の課題（９ページ参照）

「封筒」を扱った課題。

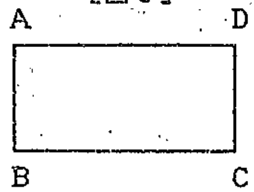
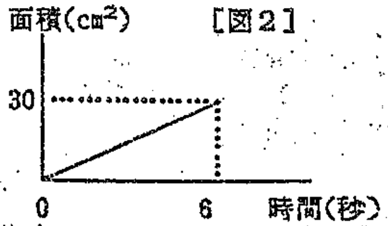
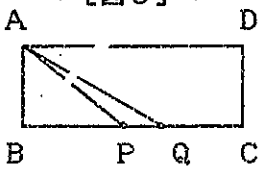
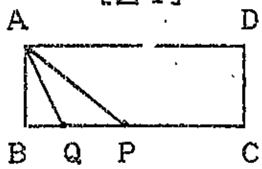
（3）第一学年「関数の利用」の指導について

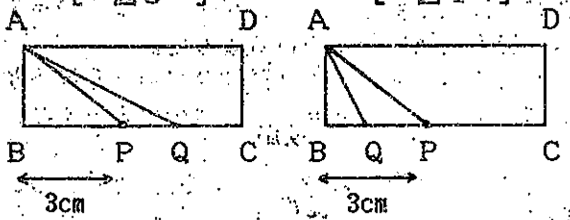
ここで示す指導案は「関数の利用」（5ページの指導計画第8時)のものでありつぎのことをねらいとしている。

ねらい ： グラフの考察を通して今まで学習した比例の特徴を見いだし、それを利用して具体的な事象を考察すること。

① 第1次案による指導

（a） 指導案

指導内容	学　習　内　容	指導上の留意点
題意を把握させる。	課　題 図1のようなAB＝10cm、BC＝24cm の長方形がある。2点P、Qは辺BC上を動くものとする。ただし、点Pは毎秒3cmの速さで頂点Bを出発し頂点Cまで動く。 [図1]  また、図2は点PがBを出発してから6秒までの時間と△APQの面積との関係を表したグラフである。このとき、点Qはどのように動いたか。 [図2]  	
与えられたグラフから、点Qがどのように動いたかを考えさせる。	質問1 グラフから点Qはどのように動いていると思いますか。 ア． 点Pと同じ速さで動いている イ． 点QはBを出発してからCまで動く ウ． 点Pとはちがう速さで動く エ． 点Qは一定の速さである オ． 点Pと点Qは同時に出発する カ． 点Qは6秒後に止まる キ． 点Qの速さは毎秒5cmである ア、イ、ウ・・・の理由を発表させる	沈黙なら“質問2”に移る。
△APQの図をかかせる。	質問2 点Pと点Qが、線分BC上を動いている瞬間の△APQの図をかきなさい。 [図3]  [図4]  ア． [図3] の方です	点Pと点Qの位置によって2種類ある。 図3または図4の片方のみの意見の場合は、教師がもう片方を提示する。

指導内容	学　習　内　容	指導上の留意点
	イ．［図4］の方です ウ．どちらでもいいです それぞれの理由を発表させる	←しばらく議論させるが、沈黙ならばもう一度点Qの動きを問う。 ↓ 質問1に戻る
1秒後の点P、Qの位置を調べさせる。	質問3 1秒後の△APQの図をかき、BP、BQ、PQの長さを書き込みなさい。 ［図3′］　　［図4′］  BP、BQ、PQ の長さがどのように求められたか発表させる ［BPの長さ］ 点Pは毎秒3cmでBから動いているから BP ＝ 3 × 1 ＝ 3（cm） ［PQの長さ］ グラフより△APQの面積は5cm²であるから $PQ = 5 \times \frac{2}{10} = 1$（cm） ［BQの長さ］ PQ＝x（cm）と置いて面積は5x（cm²）となり 5x＝5　∴x＝1（cm） と出している生徒がいたら、その考えを発表させる。 図3の場合 BQ ＝ BP＋PQ ＝ 3 ＋ 1 ＝ 4（cm） 図4の場合 BQ ＝ BP－PQ ＝ 3 － 1 ＝ 2（cm）	←BP間は3cm △APQの面積が5cm²であることを確認させる。
点Qが一定の速さであることを確かめさせる	質問4 2秒、3秒、4秒 … のBP、BQ、PQの長さを求めなさい。	
まとめ	・点Pと点Qは頂点Pから同時に出発している。 ・点Pの速さも点Qの速さも一定である ・点Qの速さは点Pの速さより遅い場合には毎秒2cmであり、点Pの速さより速い場合には毎秒4cmである。	

（b）　授業の記録（略）

（c） 研究協議 （ 昭和62年5月20日 高村真彦教諭研究授業 ）

・授業者から

全体的に時間が足りなかったが、質問１の点Ｑの動きについて、生徒に言わせるだけ言わせた。生徒は予想以上に点Ｑのいろいろな動きを考えた。

・課題の与え方について

ア．今日のように全部示す方法と、課題の前半部分だけを示して点Ｑの動きを自由に考えさせる方法がある。後者の方法をとった場合、後からグラフを提示するので、グラフを強調できると思うが、はたして生徒は点Ｑの動きを自由に考えるかどうか。両方やってみなければわからない。

・質問１（点Ｑはどのように動いたか）について

ア．点Ｐを警官、点Ｑをどろぼうにたとえて、その動きを説明している生徒がいた。今の生徒は、テレビゲームの影響を強く受けているようだ。

イ．時間をかけすぎている。５分ぐらいで切って、質問２にいったほうがよい。この質問１は方向づけをすればよい。後半の質問で、点Ｑの動きをくわしく考えさせればよいのではないか。

ウ．黒板にグラフがかいてあったら、もう少し違う反応があったと思う。初めは、グラフを忘れて議論していた。

エ．数値を出して、点Ｑの動きを説明している生徒が何人かいた。そのような意見をとりあげれば、時間や速さなどに着目し考えていくのではないか。

・質問２（△ＡＰＱの図をかきなさい）について

ア．数値を与えて図をかかせる方が自然ではないか。

イ．点Ｑが点Ｐよりも速いか遅いかの２通りあることに気づくのは、生徒にとってあまり難しい問題ではないようだ。

ウ．図をかくのにもう少し時間をとった方がよい。生徒は、そこで課題を理解している。

・質問３（１秒後のＢＰ、ＢＱ、ＰＱの長さ）について

ア．１秒後、６秒後のどちらをかかせた方がよいか。グラフから６秒後に目がいく。１秒、２秒 ・・・ と生徒は順序通り考えていない。

イ．グラフを４秒までにしておくほうが、点Ｑの動きがいろいろ議論できる。

ウ．初めにＰＱの長さを求めた生徒が多かった。

・まとめについて

ア．今日は時間的に余裕がなかったが、どこをきちんとおさえればよいか。

イ．点Ｑは、“頂点Ｂを出発していること”“等速運動であること”この２点をおさえることが必要である。

ウ．頂点Ｂが出発点である理由を明確に指摘するのは難しい。「グラフが原点を通るので０秒後の△ＡＰＱの面積が０cm^2である」ということをきちんとおさえる必要がある。

エ．たとえば点Ｑが遅い場合、６秒後のＢＱの長さは１２ｃｍで、１２÷６＝２（ｃｍ／秒）だから毎秒２ｃｍの速さ（等速運動）と考えているようだ。グラフをきちんとよみとらせて、等速運動であることをおさえることも大切である。

・その他

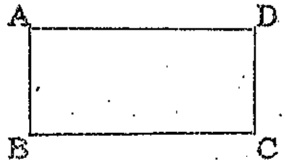
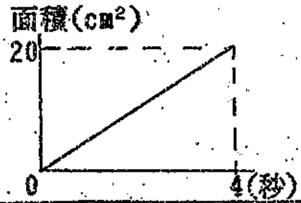
ア．指導計画ではこの「関数の利用」を１時間分とったが、時間的余裕があれば、もう１時間とり６秒以降の点Ｐ、点Ｑの動きをいろいろ考えさせたい。

①　第２次案による指導

（ａ）指導案（略）

（ｂ）授業の記録

昭和６２年６月２５日（木）　三鷹市立三鷹第六中学校　授業者 浜仲 章 教諭

指導内容と教師の活動	生徒の活動と反応	備考
（ＴＰで右の課題１を示す） この問題を読んでください。	課題１ （TP） 図１のようなＡＢ＝10cm、ＢＣ＝24cmの長方形がある。２点Ｐ，Ｑは辺ＢＣ上を動くものとする。 ただし、点Ｐは毎秒３cmの速さで頂点Ｂを出発し頂点Ｃまで動く。 このとき点Ｑはどのように動きますか。 図１  （課題１を読む）	
では、点Ｑはどのように動いていると思いますか。　（質問１）	（何を答えたらよいか迷っている） P_1 わからない。 P_2 ＢからＣに向かって動く。 P_3 点Ｐと同じ。 P_4 意味がわからない。	
やはりこれだけではわかりませんね。では次の条件があったらどうでしょう。 （ＴＰで右の課題２を示す） 問題を読んでください。	課題２ （TP） 図２は、課題１において点Ｐが頂点Ｂを出発してから４秒までの時間と△ＡＰＱの面積との関係を表したグラフである。 与えられたグラフから、点Ｑはどのように動いていると思いますか。 図２  P_5 （課題を読む）	
先ほどのに比べてグラフが出てきましたね では、点Ｑはどのように動きますか。 （質問２）	P_6 グラフは４秒までか・・・ P_7 毎秒何cmかということですか。 P_8 どのように動くかということは、方向ですか、速さですか、それとも時間を答えればよいのですか。	生徒には、課題１、２を合わせて１つの課題として書いたプリントを配布する。
いろいろと考えて下さい。	P_9 点Ｐはまん中までいくのに４秒かかる。４秒のときの面積は２０cm² だから… P_{10} ＣからＢに向かって動いている。 P_{11} P_{10}さんの考えだと面積は途中で０になってしまうよ。 P_{12} 点Ｐと同時に出発して、毎秒２cmの速さと考えれば、４秒のときの面積は２０cm² になります。	
なぜですか。	P_{12} 点Ｐの速さは毎秒３cmだからです。 P_{13} P_{12}君の考えは絶対にあっている。	

P14　私は、BからCに向かって毎秒4cmの速さで動いていると思います。

なぜ、P12君は毎秒2cmの速さだとわかったのですか。もう少し詳しく説明してください。

P12　4秒のときの面積が20cm² になるには点Pは12cm進んでいるから、点Qは8cm進んだと考えなければなりません。
　つまり、PQの長さが4cmでなければ、△APQの面積は20cm² になりません。

P13君はどうですか

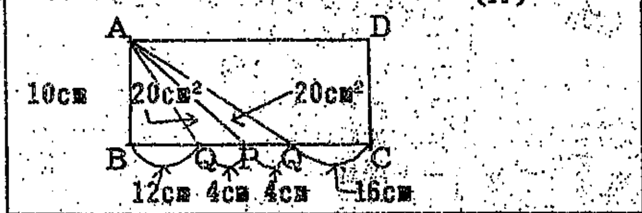
P13　P12君と同じ考えです。ABの長さは10cmだから、10×4÷2＝20(cm²) となります。

では、P14さんの考えは…

P14　はい。私もP12君と同じ考えですが、点Qが点Pの右側にあると考えました。
　BQの長さが16cmのときも、△APQの面積は20cm² になります。
　16÷4で点Qの速さは毎秒4cmです。

P12君とP14さんの考えを整理してみましょう。（TPで右の図を示す）

(TP)



△APQの面積が20cm² となぜわかるのですか。

P15　グラフをみてわかりました。

P16　先生。△APQというのは点Pの右側にある三角形をいうのではありませんか。

△APQとかけば、左まわりに読むことだと思っている

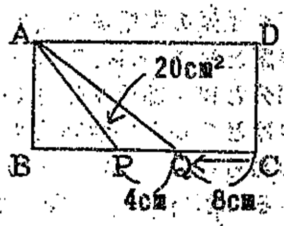
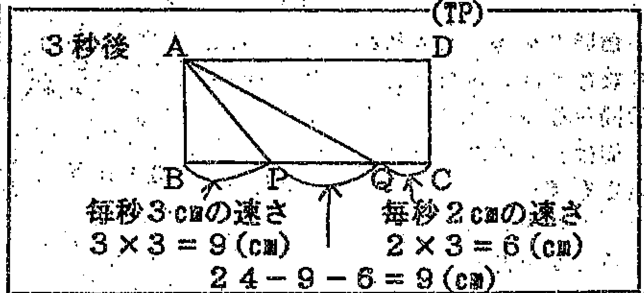
そういう考えもありますが、ここでは点Pの左側にあるものも考えていきましょう。
（いままでの発表内容を板書する）

板書

点Qは頂点Bから毎秒2cmで頂点Cまで動く。	BP　3×4＝12(cm) PQ　20×2÷10＝4(cm) BQ　12－4＝8(cm) 点Qの速さ　8÷4＝2、毎秒2cm
点Qは頂点Bから毎秒4cmで頂点Cまで動く。	BP　3×4＝12(cm) PQ　20×2÷10＝4(cm) BQ　12＋4＝16(cm) 点Qの速さ　16÷4＝4、毎秒4cm

P17　それだと4秒のときはよいのですが、2秒のときは速さが違ってきませんか。
（この意見に、皆耳を傾ける）

P17　また僕はおかしいことを言ったのかな。

	P16　いつでも同じ速さだよ。1秒のときも、2秒のときも、3秒のときも僕は計算して確かめたよ。 P17　そうか。時間が半分になれば、面積も半分になるのか。	
そうですね。しかしそれはどこでわかるのですか。	P17　グラフをみればわかります。	
では、なぜ点Qは頂点Bを出発して、頂点Cまで行くとわかるのですか。	P18　頂点Cからだといつか面積が0になってしまいます。	
P18さんは頂点Cから出発したと考えたのでしたね。	P19　点Qが毎秒2cmの速さで頂点Cを出発すればP14さんと同じになります。 4秒後の点Qの位置は、2×4＝8(cm)でCQ＝8(cm)のところにあります。  このとき、PQ＝4(cm)となりますから△APQの面積は20cm² で、あっています。	
例えば、点Qが頂点Cから出発したとして考えてみましょう。 3秒後は次の図のようになります。 （右の図をTPに示し、式を説明する）	 	
だから、PQ＝9cmで△APQの面積は、9×10÷2＝45（cm²）で、グラフからよみとれる面積15cm² と異なります。 つまり、点Qが頂点Cから出発したと考えると、おかしいことになります。	（うなずく）	
今日は、いろいろな意見が出ましたね。 では、終ります。	（終わった後、3～4人の生徒が教師に、4秒以降の点の動きがどうなるかを聞いてきた）	（チャイムがなる）

（ｃ）研究協議　（昭和６２年６月２５日　浜仲 章 教諭 研究授業）

・授業者から

生徒はよく意見を言っていた。しかし、指導者がもっていきたい方向に指導しようとするので、無理が出てしまった。１時間で終わる内容ではないと頭の中で考え、あせってしまった。

「点Ｑはどのように動くか」という質問に対して、すぐに１人の生徒が「それは毎秒何cmと答えるのか」と質問をした。生徒の意識の方が先行していた。

・課題の出し方について

ア、前回の研究授業の課題を２つに分けるのはよいが、後半部分をもっと早く出したほうがよい。グラフがあって初めて条件が出そろうことを意識させたい。

イ、前回の研究授業の課題を２つに分け“課題１”“課題２”としたが、指導案では１つの課題として一緒に示し、２つは違う課題ではないので、指導上の留意点に、前半部分と後半部分を分けて生徒に示すことを書いておけばよい。

・質問１（点Ｑはどのように動いたか）について

ア、質問１のねらいの１つは、この課題を読ませることにある。「点Ｑはどのように動いていると思いますか」という問いかけより、「点Ｑはどのように動いていると予想されますか」の方が自然ではないか。

イ、質問１をしたとき、「わからない」と答えが返ってきたが、「なぜわからないのか」を聞いた方がよかった。課題がわからないのは条件が不足しているからで、そのことに気づかせてから、課題２を提示するとよかった。

ウ、質問１をしたとき、「どの様に動くかというのは、方向ですか、それとも時間ですか、速さですか」という鋭い質問をした生徒がいた。

・その他

ア、質問１、質問２の後、４秒後の図をかかせた方がよかった。すべての生徒にはっきりさせなければならないことと、そうでないことを整理する必要がある。

イ、今日は時間がなかったが、点Ｑが一定の速さで動いていることにこだわりたい。何人かの生徒は、２秒後、３秒後についても調べていた。４秒後のＢＱの長さから点Ｑの速さを調べるだけでは、一定の速さをおさえた指導とはいえないだろう。

ウ、点Ｑが点Ｐより遅い場合と速い場合があるが、時間的余裕がなければ、一方だけを考察する方法もある。

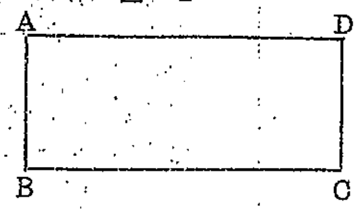
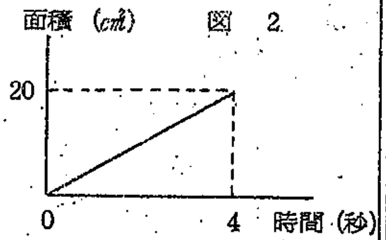
エ、比例関係については、「一方が半分ならば他方も半分（授業中の生徒のいい方）」と「グラフ」の両方をおさえる必要があろう。

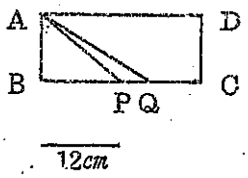
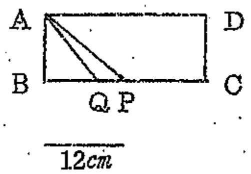
オ、もう１時間あれば、点Ｑが一定の速さであることをきちんとおさえたり、４秒以降の点Ｑの動きを考えさせたい。

また、１人ひとりの生徒が調べたいことを課題として設定することもできる。時間的に余裕のある学校でできるように、もう１時間分の指導案を考えてもよいだろう。

カ、４秒後の点Ｑの位置は、ＢＱが８cmの場合と１６cmの場合があり、ＢＣの中点の位置にある点Ｐについて左右対称である。だから、１６cmの場合は、点Ｑは頂点Ｃを出発して毎秒２cmで動いていると考えた生徒がいた。

③　改訂指導案

指導内容	学　習　内　容	指導上の留意点
題意を把握させる	**課　題** （条件１） 図１のようなＡＢ＝10㎝，ＢＣ＝24㎝の長方形がある。 ２点Ｐ，Ｑは辺ＢＣ上を動くものとする。ただし、点Ｐは毎秒３㎝の速さで頂点Ｂを出発し頂点Ｃまで動く。 図　1  （条件２） また、図２は点ＰがＢを出発してから４秒までの時間と△ＡＰＱの面積との関係を表したグラフである。 図　2  このとき点Ｑはどのように動いたか。	
条件１だけで考えさせる	①　点Ｑがどのように動いているかを思いつくままにいう。 ・わからない ・自由に動く ・頂点Ｃから出発して頂点Ｂまで動く ⋮	課題の条件１だけを最初に示し問う。 意見が出ない場合はすぐに条件２を示し　②　に移る。
条件１と２をあわせて、点Ｑの動きを具体的に考えさせる	②　与えられたグラフから、点Ｑがどのように動いているかを考える。 ・点Ｐと同じ速さで動いている ・点ＱはＢを出発してからＣまで動く ・点Ｐとはちがう速さで動く ・点Ｑは一定の速さである ・点Ｐと点Ｑは同時に出発する ・点Ｑは４秒後に止まる ・点Ｑの速さは毎秒５㎝である	意見が出ない場合は「どのように動くか」とは、どんなことをはっきりさせればよいかを問う。

	・点Qは往復している ・点Qはずっと動いている ・点QはCから動く ・点Qは点Pとすれちがう ・点Pより速く（遅く）動いている ・毎秒4㎝で動いている ・毎秒2㎝で動いている	意見があまり出ない場合でも ③ に移る。 毎秒4㎝，毎秒2㎝が出てきても ③ をとりあげる。
4秒後の点P，Qの位置を調べさせる	③ 4秒後の△APQの図をかく。 	点Qの位置は2通りあるが一方しか出ない場合はBP，BQ，PQの長さを求める計算の中でとりあげる。
	④ 4秒後のBP，BQ，PQの長さをどのように求めるかを発表する。 BPの長さ 点Pは毎秒3㎝でBから動いているから BP＝3×4＝12（㎝）	BP，BQ，PQの長さを求める順序を指示しない。
	PQの長さ グラフより△APQの面積は20㎠であるから PQ×10×1／2＝20より　PQ＝4（㎝）	△APQの底辺と高さを確認する。
	BQの長さ 図3の場合 BQ＝BP＋PQ＝12＋4＝16（㎝） 図4の場合 BQ＝BP－PQ＝12－4＝8（㎝）	
点Qの速さを考えさせる	⑤ 点Qの速さを求める。 図3の場合 16÷4＝毎秒4㎝ 図4の場合 8÷4＝毎秒2㎝	点Qが等速運動をしていると初めから決めている生徒がいるから、そのことに疑問をもたせ ⑥ に移る。

点Qが一定の速さであることを調べさせる	⑥ 1，2，3秒後の△APQの面積を求めそれぞれの場合のBQの長さを求める。 ・1秒後　　5㎠ ・2秒後　　10㎠ ・3秒後　　15㎠	
	図3の場合 <table><tr><td>時　間</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>BQ</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td></tr></table>図4の場合 <table><tr><td>時　間</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>BQ</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	出発点が点Bであることを確認する。 BQの長さは時間に比例することを確認する。
ま と め	表、グラフ、式における比例の特徴を使って、どのように解決したかをまとめる。	

3　今後の課題

本委員会は、今後、次の点について研究を続けていこうと考えている。

（1）　現在の中学校での関数教育の問題点をさぐり、小学校や高等学校での指導も考えながら、中学校3か年を見通した関数カリキュラムについてのより綿密な提言を行う。そして、その提言にそって作成した指導計画や指導案を、授業研究を通して検討する。その際、特に小学校と中学校との関連を配慮する。

（2）　今回の発表の中心である「関数の利用」についてのより深い考察を行い、適切な課題を工夫して、関数領域における数学的な考え方を伸ばす指導を追究する。さらに、そこでの考察をもとに、他領域との関連も考えて、総合的な課題解決力を伸ばすための指導について考察する。

（3）　関数領域以外で、関数的な考え方を伸ばすのにふさわしい指導場面について検討する。そして、そこでの指導と関数領域での指導との関連を明らかにして、より適切な関数指導を追究する。

（4）　一人ひとりの生徒の関数概念についての理解は、どのように高まり深まるのかを考察する。そして、生徒の関数概念についての理解を高めるには、どのような内容をどのように指導すればよいかについての実証的検討を行う。

＝東京都中学校数学研究会研究部　関数委員会＝

岩木敬二郎	元板橋区立中台中	居駒　永信	中野区立北中野中
遠藤　国雄	板橋区立上板橋三中	奥田佐夫郎	新宿区立西戸山二中
小沢　慶晃	多摩市立多摩中	風間喜美江	江東区立第二大島中
国宗　　進	東京学芸大附属世田谷中	五島　芳夫	港区立三河台中
坂本　和良	新宿区立淀橋二中	須藤　哲夫	品川区立大崎中
関　富美雄	品川区立八潮中	高村　真彦	練馬区立開進第四中
野依　六郎	東京都立教育研究所	橋爪　昭男	中央区立中央第四中
浜仲　　章	三鷹市立第六中	半田　　進	東京学芸大附属小金井中
山田　武司	板橋区立板橋三中	渡辺　英俊	奥多摩町立小河内中