第７０回　日数教全国大会（静岡）研究発表資料　１９８８．８．

「関数の利用」の指導について

東京都中学校数学研究会　研究部　関数委員会

もくじ

１　研究の経過とねらい

数か月後の新学習指導要領告示を控えて、それについての発言も随分聞かれるようになってきた。

この十余年間、本委員会では、中学校関数についての具体的・実践的な指導計画や指導案を作成し、それらを授業研究を通して実証的に検討した。また、各学年における評価問題を作成、実施し、その結果の検討を行って、特に生徒の理解が不十分な内容については、授業研究を通して指導計画や指導案を再検討し修正を重ねてきた。さらに、小学校における比例、反比例の指導内容との関連も考えた。

60年度までの研究によって、現行の教育課程における中学校での関数指導については、一応のまとめをみている。［"中学校での関数指導について（その１）、（その２）"日数教学会誌数学教育　第68巻11号 1986.11. 、第69巻１号 1987.1.　参照］

また、これまでの研究成果を踏まえて、中学校での関数カリキュラムについて、問題点を明らかにし、それについていくつかの提言も行った。

なお、これまでの研究内容は、55年度以降、日数教全国大会（東京、山形、岡山、埼玉、福井、奈良、東京、福岡）、日数教関ブロ大会、東京都中数研発表大会において、その都度報告している。

以上の経過を踏まえて、今年度は、次のことをねらいとして研究を進めた。

関数の考えを使った課題解決時の指導（「関数の利用」）について、授業研究を通して指導の実際を検討し、あわせて課題の開発を図ること

2　研究の内容

（1）　指導計画

これまでに作成、検討してきた各学年の指導計画は、次の表の通りである。

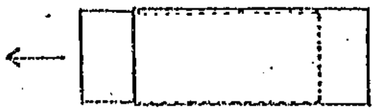
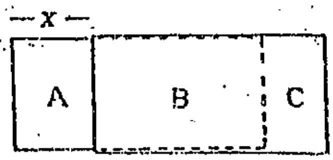
指導計画の作成にあたっては、次の①～③のような指導過程をとるようにしている。

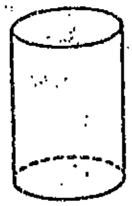
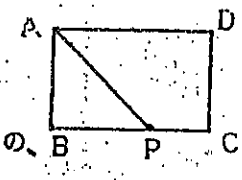
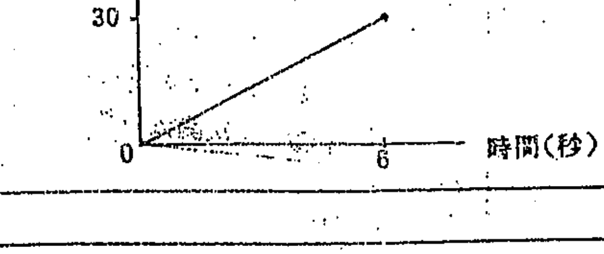
① 多くの変量を取り出せる具体的な課題を提示する。

② その中の２変量の関係について調べる。その際、「変化のようすをとらえる」、「対応の規則を調べる」という視点を重視する。

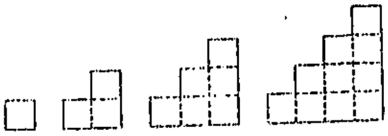
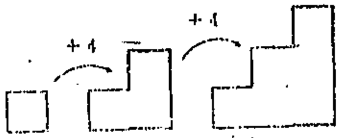
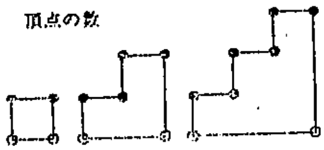
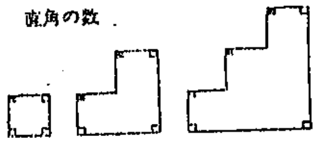
③ ひととおりの指導を終えたところで、関数の考えを使って課題解決をさせるための時間を設定する。

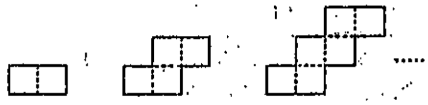
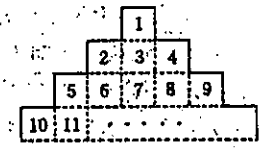
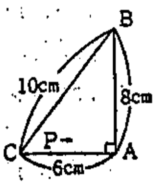
1．第1学年の指導計画

時数	項　目	指　導　内　容
1	変化と関数	[課題]　封筒から画用紙を引き出してゆく。  (1)　変化する量・変化しない量をあげる。 [1]　引き出した長さと周囲の長さとの関係を調べる。 $y=2x+64$ [2]　引き出した長さとAの部分の面積との関係を調べる。  $y=12x$ (2)　「変数」を定義する。
2		[3]　引き出した長さと全体の面積との関係を調べる。 $y=240+12x$ [4]　引き出した長さとBの部分の面積との関係を調べる。 $y=240-12x$ (1)　「yはxの関数である」ことを定義する。 (2)　「変域」を定義する。
3	関数 $y=ax$	(1)　2つの変数 x，y の間に、$y=2x$，$y=-3x$ という関係があるとき、x，y の変化の様子を調べる。 (2)　「yはxに比例する」ことを定義する。

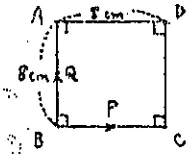
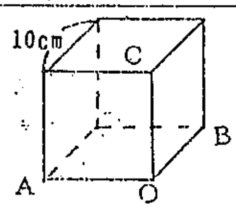
4	(式の決定)	(1) 右の図のような円柱状の空の容器に、一定の割合で水を入れたところ、3分後 に 6 c m の深さまで、水が入った。 x分後 の水の深さを y c m として、yをxの式で表す。  $y=2x$ (2) いくつかの具体的な事象について比例の関係を確かめる
5	関数 $y=ax$ のグラフ	(1) $y=2x$ のグラフをかく (2) グラフをかくときに座標の考え方が有効であることを知る。
6		(1) $y=3x$、$y=-3x$ のグラフをかく。 (2) $y=ax$ のグラフから変化をよみとる。 (3) $y=ax$ のグラフの特徴をまとめる。
7		(1) 原点と他の1点で $y=ax$ のグラフをかく。 (2) グラフから式を求める。
8	関数の利用	[課題] 右の図のようなAB＝10cm、BC＝24cmの長方形がある。点Pは毎秒3cmの速さで辺BC上を頂点Bを出発して頂点Cまで動くものとする。 次のことを考えなさい。  1. 点Pが頂点Bを出発してからの、時間に比例する量をあげる。 (それらを、式、グラフで考察する。) 2. 辺BC上を動く点Qがあり、時間と△APQの面積の関係が下のグラフであらわされている。 点Qはどのように動いたかを考える。 (それらを、式、グラフで考察する。) 
9	問題練習	

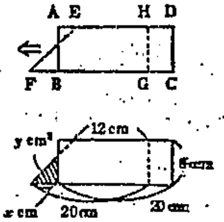
2．第2学年の指導計画　（19時間）

時数	項　目	指　導　内　容
1	1次関数の意味	［課題］　1辺の長さが1cmの正方形の紙を階段の形に積んでいく。  ①　ともなって変わる量をあげる。 ［Ⅰ］階段の数がx段のときの周囲の長さをycmとして、その変化のようすを調べる。  ②　表、グラフ、式（$y=4x$）を求める。 ③　$y=4x$で、定数4の意味を考える。
2		［Ⅱ］階段の数がx段のときの頂点の数をy個として、その変化のようすを調べる。 頂点の数  ［Ⅲ］階段の数がx段のときの直角の数をy個として、その変化のようすを調べる。 直角の数  ①　「yはxの1次関数である」ことを定義する。
3	1次関数の値の変化とグラフ	①　$y=2x+3$、$y=-5x+4$　について、変化のようすを調べる。 ②　「変化の割合」を定義する。 ③　1次関数についての変化の割合の特徴をまとめる。
4		①　$y=2x+3$、$y=2x$　のグラフをかく。 ②　$y=-2x+4$、$y=-2x$　のグラフをかく。 ③　1次関数のグラフと比例のグラフとの関係を調べる。 ④　「切片」を定義する。
5		①　$y=2x+3$、$y=-2x+4$　のグラフの傾きぐあいを調べる。 ②　「傾き」を定義する。 ③　1次関数$y=ax+b$で、$a>0$のときと$a<0$のときの変化のようすの違いを調べる。
6		①　$y=2x+1$、$y=\frac{2}{3}x+1$、$y=-\frac{1}{2}x+3$　のグラフを、傾きや切片を使ってかく。 ②　グラフが平行になるときの変化や式の特徴を調べる。 ③　1次関数のグラフの特徴をまとめる。

7	1次関数を求める	［課題］　縦1cm、横2cmの長方形を右の図のように積んでいく。  ①　ともなって変わる量をあげる。 ［Ⅰ］階段の数がx段のときの周囲の長さをycmとして、yをxの式で表す。（$y=4x+2$） ②　各自、どのように式を求めたかを発表させる。 ③　1次関数の式は、変化の割合aと1組のx、yの値から、また、2組のx、yの値から求められることをまとめる。
8		（1次関数の式の決定についての問題練習）
9		（測定値の資料などから1次関数を求める。－実験式）
10	1次関数の利用	［課題］　1辺が1cmの正方形を、右の図のように1段ずつ順に並べ加えて図形をつくる。  ［Ⅰ］階段の数がx段のときの周囲の長さをycmとして、yをxの式で表す。（$y=6x-2$） ［Ⅱ］x段目にある数字の個数をy個として、yをxの式で表す。（$y=2x-1$） ［Ⅲ］x段目の右端にくる数字をyとして、yをxの式で表す。（$y=x^2$） 
11		［課題］　右の図のような△BCA（∠A＝∠R）がある。点PはCを出発して、毎秒1cmの速さでAを通ってBまで動く。  ①　ともなって変わる量をあげる。 ［Ⅰ］点PがCを出発してからx秒後のときの△BCPの面積をy cm^{2}として、変化のようすを調べる。（変域に注意させる。）
12 13	問題練習	

3．第3学年の指導計画　（14時間）

時数	項　目	指　導　内　容
1	2次関数	［課題］　1辺が8㎝の正方形がある。その辺上を2点P、Qが同時に頂点Bを出発して、それぞれ毎秒2㎝の速さで頂点Dまで動く。  　変化するものをあげなさい。 ・時間と面積（△ＰＱＢ、五角形ＰＱＡＢＣ）との関係を調べる。 　　$0 \leqq x \leqq 4$のとき、$y=2x^2$ 　　$4 \leqq x \leqq 8$のとき、$y=-2x^2+32x-64$
2		①　$y=2x^2$、$y=-4x^2$　について、xの値がn倍になるときyの値はn^2倍になることを確かめる。 ②　具体的な例（立方体の表面積、高さ一定の正四角柱の体積など）について立式する。
3	関数 $y=ax^2$の グラフ	①　$y=x^2$、$y=-x^2$のグラフをかく。 ②　$y=x^2$、$y=-x^2$のグラフの特徴をまとめる。
4		①　$y=x^2$のグラフをもとに、$y=2x^2$、$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフをかく。 ②　$y=-x^2$のグラフをもとに、$y=-2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$のグラフをかく。 ③　$y=ax^2$のグラフの特徴をまとめる。
5	変化の 割合	①　1次関数$y=2x+4$の変化の割合の意味を、表やグラフで復習する。 ②　$y=x^2$について、変化の割合を調べる。
6		①　$y=-2x^2$について、変化の割合を調べる。 ②　変化の割合のグラフ上での意味を考える。
7	問題練習	（自然落下も扱う。）
8	いろいろな 関数（1）	［課題1］右の図のような1辺が10㎝の立方体がある。点Q、Rは、それぞれ辺ＯＢ、ＯＣ上のＯＱ＝4㎝、ＯＲ＝6㎝の位置に停止しており、点Pは頂点Oを出発し辺ＯＡ上を毎秒1㎝の速さでAまで動く。  　点PがOを出発してからx秒後の三角すいR－ＰＯＱの体積をy㎤とする。yをxの式で表せ。 ［課題2］課題1の立方体で、次のア、イそれぞれの条件について、yをxの式で表せ。 ア　点Rは辺ＯＣ上のＯＲ＝6㎝の位置に停止しており、点P、QはOを同時に出発し、それぞれ辺ＯＡ、ＯＢ上を毎秒1㎝の速さでA、Bまで動く。点P、QがOを出発してからx秒後の三角すいR－ＰＯＱの体積をy㎤とする。（$y=x^2$） イ　点P、Q、RはOを同時に出発し、それぞれ辺ＯＡ、ＯＢ、ＯＣ

		上を毎秒1cmの速さでA、B、Cまで動く。点P、Q、RがOを出発してからx秒後の三角すいR－POQの体積をy cm³とする。 （$y=\frac{1}{6}x^3$） ・関数$y=4x$、$y=x^2$、$y=\frac{1}{6}x^3$の値の変化を表で調べる。
9		［課題］点Rは辺OC上のOR＝6cmの位置に停止しており、点QはOを出発し、辺OB上を毎秒1cmの速さでBまで動く。そのとき、点Pは三角すいR－POQの体積が6cm³で一定になるように辺OA上を動く。点QがOを出発してからx秒後のOPの長さをy cmとする。yをxの式で表せ。（$y=6/x$） ・$y=6/x$ について、変化や対応のようすを調べる。 ・yはxに反比例することの定義をする。 ・反比例のグラフをかく。
10		［課題］点P、QはOを同時に出発し、それぞれ辺OA、OB上を毎秒1cmの速さでA、Bまで動く。点Rは三角すいR－POQの体積が4cm³で一定になるように辺OC上を動く。点P、QがOを出発してからx秒後のORの長さをy cmとする。yをxの式で表せ。 （$y=24/x^2$） ・$y=24/x^2$について、変化や対応のようすを調べる。 ・$y=x^3$のグラフについて調べる。
11	いろいろな関数（2）	①　1次関数$y=2x-3$と関数$y=2x^2$とについて、式、グラフ、対応のしかたや増減のようすは異なるが、「xの値を1つ決めれば、yの値がただ1つ決まる」ことは共通していることを確認する。 ②　対応による関数の定義をする。 ③　これまでに学習した関数を対応により見直す。
12		①　ある地下鉄の運賃は、次の表のようになっている。（表、略）乗車距離と料金との関係を調べよう。 ②　A駅からB団地行きのバスの料金は160円均一で、A駅からB団地までの道のりは5kmである。乗車距離と料金との関係を調べよう。 ③　xを1けたの自然数とする。xを3で割ったときの余りをyとして、xとyとの関係を調べよう。 ④　関数にならない例について考える。
13	関数の利用	［課題］右の図のように、長方形ABCDの封筒から、台形EFGHの画用紙を引き出していく。何が変わりますか。 ・変わるものをあげる。 ・画用紙をx cm引き出したとき、引き出した部分の面積をy cm²として、xとyとの関係をいろいろな方法によって調べる。 
14	問題練習	

（２） 「関数の利用」の指導の意味

中学校での関数指導のねらいとしては、次のことがあげられよう。

① 身近な具体的事象から、関数関係にある２つの数量を見いだすことができるようにさせる。

② 関数関係にある２つの数量の変化のようすや対応のしかたの特徴を調べたり、基本的な関数についての特徴を、表、グラフ、式などから考察し、理解させる。

③ 関数的な見方・考え方により、問題解決をはかることができるようにさせる。

これまでにも、①、②については多くの研究成果が報告されているが、③についての研究は消極的のように思われる。

関数の指導においては、表をつくる、グラフをかくなどの個々の知識や技能についての指導にとどまらずに、①、②についての学習内容を有機的に活用することによってより深い理解をさせ、問題解決力を伸ばす指導、つまり、③についての指導が大切である。

本発表は、③についての指導に関するものである。このような指導を、ここでは「関数の利用」の指導と呼ぶことにする。

（３） 「関数の利用」の課題について

各学年における「関数の利用」の指導を考える際には、次のような課題を開発することを心がけてきた。

・それまでに学習してきたことを総合的に利用して解決できる課題

・表、グラフ、式、変化や対応、変域などの見方や考え方をよりいっそう深めることができる課題

・課題の解決にあたって、生徒の多様な考えを生みだすことができる課題

・生徒自らが、発展させ深化させることができる課題

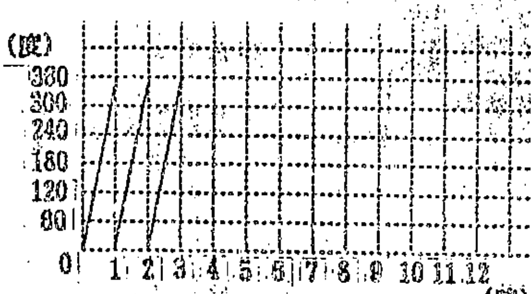
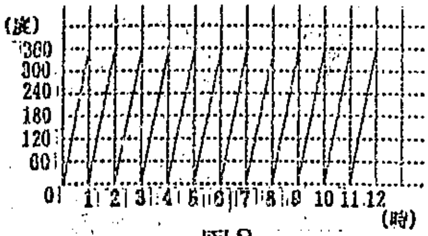
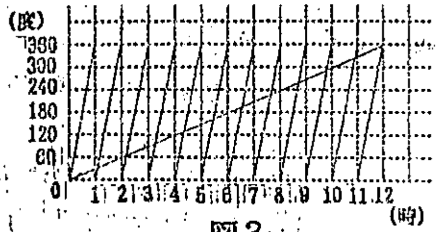
・身近にある具体的な素材で、場面を視覚的にとらえることができる課題

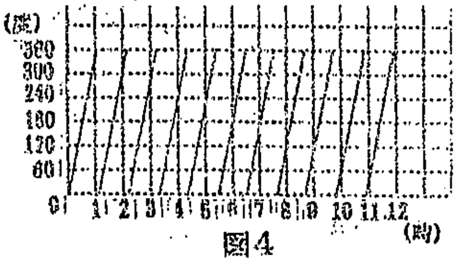
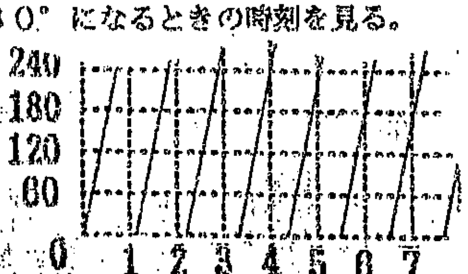
（４） 第１学年「関数の利用」 その１

３ページの、第１学年の指導計画第８時「関数の利用」の項を参照。

(5)　第１学年「関数の利用」　その２

①　指導案

指導内容	学習活動	指導上の留意点
題意を把握させる	**課題１** 右のグラフは、長針の動くようすを表したものです。 グラフを完成しなさい。  図１	
	①　グラフをかく。  図２	なぜ３６０°までのグラフなのかを確認する。
時刻と長針・短針の動く角度との関係について調べさせる	**課題２** 図２に短針の動くようすを表すグラフをかきなさい。	
	②　グラフをかく。  図３ ③　グラフからわかることを発表する。 ア．長針は１時間に３６０°回転する。 イ．短針は１時間に３０°回転する。 ウ．角度は、０°から３６０°までとる。 エ．長針は１２回同じ動きをくりかえしている オ．グラフの交点は長針と短針が重なったことを示している。 など	長針と短針についてのグラフは色分けをしてかく。 オ．の意見が出ない場合は「２つのグラフの交点は何を表しているか」を問う

指導内容	学習活動	指導上の留意点
時刻と長針・短針とがつくる角度との関係について調べさせる。	**課題3** 長針と短針とがつくる角度は時刻によってどのように変わりますか。 ④ 発表する。 ア．角度はだんだん大きくなる。 イ．０°から３６０°になる。 ウ．１時間ごとに重なり０°になる。 など ⑤ 長針と短針とがつくる角度と時刻との関係をグラフに表す。 ア．表をつくってからグラフをかく。 イ．直接グラフをかく。  図4	 何をしてよいか分からない生徒には表を書くように指示する。
グラフを利用して問題を解決させる。	**課題4** (1)　長針と短針の先端の距離が最も長くなる時刻を知るには、図4のグラフのどこを見ればわかりますか。 (2)　長針と短針の先端を結んでできる三角形の面積が最も大きくなる時刻を求めなさい。 ⑥ 図4を使って調べる。 (1)　１８０°になるときの時刻を見る。  (2)　直角三角形になるときが面積が最大。図3のグラフの９０°または２７０°になるときの時刻を見る。	 グラフから読みとれる程度の時刻が分かればよく、正確な数値までは求めない 面積が最大になることを図で確認する

②研究協議（昭和６３年６月２４日　風間喜美江教諭研究授業）

・授業者から

ア．第１学年指導計画「関数の利用」（第８時）の課題から一歩進んだものを開発する、という姿勢で取り組んだ。

イ．時計を使った課題は、具体的でよいのではないか。

ウ．第１学年で、交点を求めることや長針と短針が１８０°になる時刻を求めるのは、計算ではむずかしいが、グラフを利用して解決するというのがよかったと思う。

エ．課題が多すぎて、時間が足りなかった。（課題３までしかできなかった）

・全体について

ア．グラフをかくことに時間をとりすぎた。

イ．グラフを利用することがねらいなのだから、グラフの意味をもっと深めた方がよい。

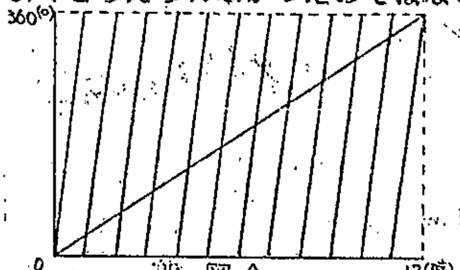
ウ．どこからはかった角度か、どちら回りにはかった角度か、はっきりしなかった。

・課題１について

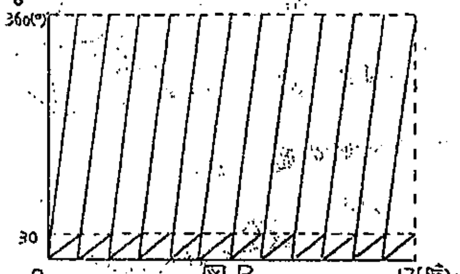
ア．グラフの意味がわからなくて、グラフをかいている生徒がいた。グラフをかかせる作業が機械的だったのではないか。

・課題２について

ア．図Aのようにかくところを図Bのようにかく生徒がいた。課題１のグラフの意味がよくとらえられなかったのではないか。



図A



図B

イ．交点の座標の意味をもう少しくわしく指導したほうがよいのではないか。

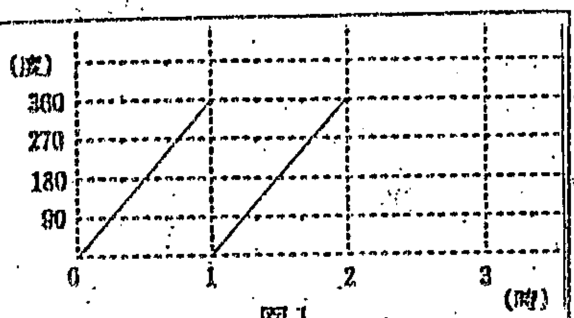
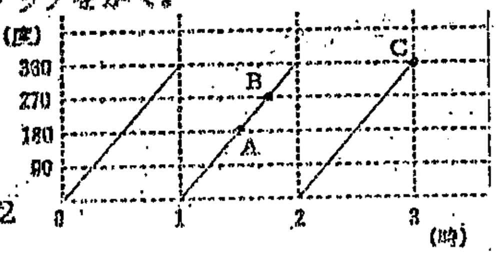
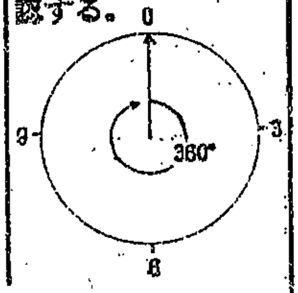
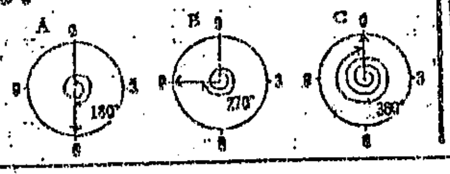
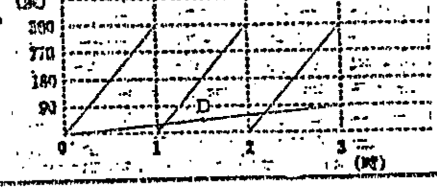
・課題３について

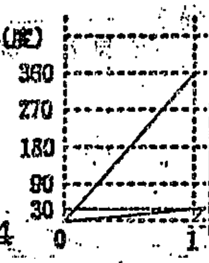
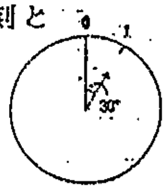
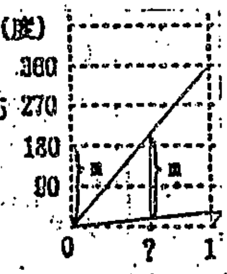
ア．長針と短針のつくる角度と時刻の関係を、表やグラフをかいて調べさせたが、課題４につながりにくい。

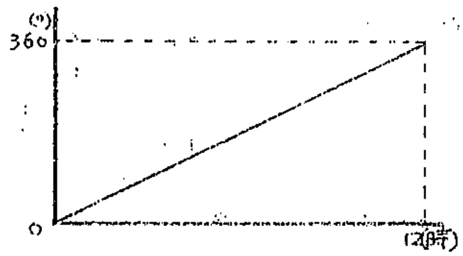
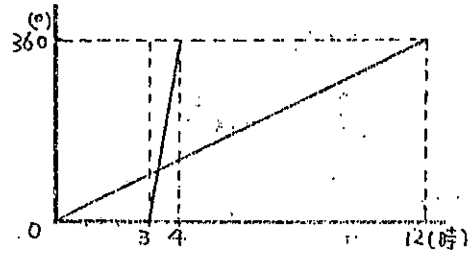
イ．課題３をやめて、課題２でかいた２つのグラフで、y座標の差が１８０°のところをみつけさせた方がよかったのではないか。

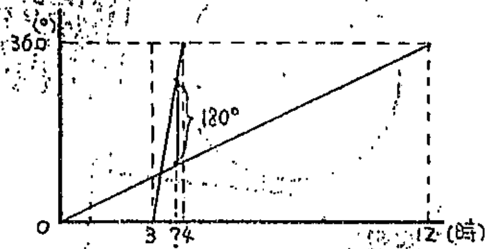
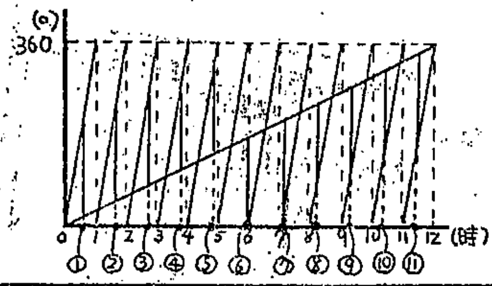
以上の協議をもとに、指導案を改訂した。また、長針と短針のつくる角度が１８０°になる時刻を計算で求めさせる、第２学年用の指導案も作成することにした。

③ 改訂指導案A（第1学年用）

指導内容	学習活動	指導上の留意点
題意を把握させる。	**課題1** 右のグラフは、時計の長針の動くようすを表したものです。 グラフを完成しなさい。  図1 ① グラフをかく。  図2	時計を見ながら考える生徒が多い。 なぜ360°までのグラフなのかを確認する。 
長針の動くようすをグラフからよみとらせる	② 長針の動くようすをグラフからよみとる ・ 0時30分のときの角度 … 0分からはかった角度で180° ・ 上の図2で 点A（1時30分） … 0分からはかって180° 点B（1時45分） … 0分からはかって270° 点C（3時00分） … 0分からはかって360° ・ 点A、B、Cが表す時刻と角度を下の図で確認する。 	グラフと図を対応させ、時間と角度の関係を確認する。
課題を提示する	**課題2** 短針の動くようすを表すグラフを（課題1の図1）にかきなさい。 ③ グラフをかく。  図3	

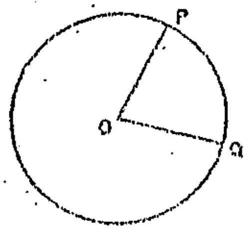
指導内容	学習活動	指導上の留意点
短針の動くようすをグラフからよみとらせる	④ 短針の動くようすをグラフからよみとる ・ 1時00分のときの角度 … 0時からはかった角度で30°  図4 ・ 図3で 点D（1時30分） … 0時からはかって45° ・ 原点を通る直線 … 時間と角度とは比例する。 （時間が2倍、3倍…になれば、角度も2倍、3倍…になる） 点Dが表す時刻と角度を図で確認する。 	長針、短針についてのグラフは色分けして表す。 360÷12=30 （0時から1時までは）長針についても同様のことがいえることにふれる。
グラフを利用して問題を解決させる。	課題3 (1) 長針と短針についてグラフの交点は、何を表していますか。 (2) 0時から1時までの間で、長針と短針の先端の距離が最も長くなるときの時刻を知るには、図3のグラフのどこを調べればよいですか。 ⑤ (1)について考える。 ・ 長針と短針が重なったとき ・ 0時から3時まで2回重なる ⑥ (1)の時刻と角度をグラフからよみとる。 図5  ⑦ (2)について考える。 ・ 長針と短針がつくる角度が180°のとき ・ 差が180°分のところをさがす ・ グラフから式を考える。 $y=360x-30x$ $y=330x$ に$y=180$を代入してxの値を求める。	始めの重なりを考えない。 時間が余れば、長針と短針がつくる角度を変えて考えさせる。

指導内容	学習活動	指導上の留意点
課題を提示する	課題１ 下のグラフを見て、気づくことをあげなさい。 	
	①グラフからわかることを発表する。 ア．直線　イ．比例のグラフ ウ．$y=30x$ エ．12時間で360° オ．１時間で30° カ．時計の短針の動くようす	０時のときが０°で、それを基準にして、時計回りの方向に角度をはかっていることを確認する。
グラフを利用して問題を解決させる。	課題２ 上のグラフを使って、３時と４時の間で、長針と短針が一直線になる時刻を求めなさい。 ②３時から４時までの間の長針の動くようすをグラフで表す。 	上のグラフは時計の短針の動くようすである、と確認してから課題２を提示する。
	③グラフの交点は何を表しているか、考える。 ア．長針と短針が重なったとき	差が０°であることを確認する。
	④一直線になるのは、長針と短針のつくる角度が何度のときか、考える。 ア．180°	差が180°であることを確認する。

	⑤②でかいたグラフでは、どこに表れているか、考える。 ・長針のグラフと短針のグラフをたてにみて、y座標の差が180°になっているところをさがす。  	たて軸で0°から180°までの長さをはかり、その長さの棒を動かしてさがすとよい。
式を利用して問題を解決させる	⑥２つの直線の式から、正確な時刻を求める。 ・長針…$y=360x-360\times3$ 短針…$y=30x$ $(360x-360\times3)-30x=180$ $x=3\frac{9}{11}$ 〔およそ3時49分〕	
発展的な問題を解決させる。	課題３ 長針と短針が一直線になるのは、０時から12時の間に何回あるか求めなさい。 ・それぞれの時刻の長針の動くようすをグラフにかきこみ、y座標の差が180°になっている回数を数える。  	180°になる時刻を、x軸上に点をとって表してもよい。 ５時台のときは、180°にはならないことを確認する。 長針と短針が一直線になる周期が一定（$\frac{12}{11}$時間ごと）であることに気づく生徒もいる。

(6)　第1学年「関数の利用」　その3

①　指導案

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>課題を提示する。</td><td>課題1
点Oを中心とする半径の等しい円が2枚重ねてある。一方の周上に点P、他方の周上に点Qの印をつけて回転させる。何が変わりますか。

①　変わるものをあげる
・　弧PQの長さ
・　直線PQの距離
・　∠POQの大きさ
・　おうぎ形POQの面積　　など</td><td>「何が変わるか」という発問にとまどう生徒がいるときは、一例をあげる。

点Pは時計の針と反対方向に回転することを強調し課題2につなげる。
(時計の針と反対方向を＋の角度とする)</td></tr>
<tr><td>点Pの動きをグラフからよみとらせる。</td><td>課題2
図1は60秒間の点Pの動きを示したものである。どのような動きをしていますか。

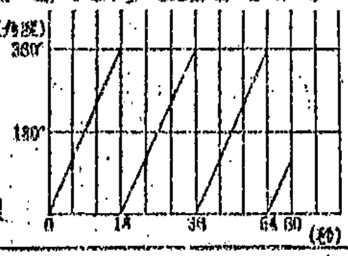



図1
②　グラフからわかることを発表する
ア．回転は時計の針と反対方向
イ．1秒間に20°進む
ウ．一定の速さで回転する　　など
③　点Pの動きをグラフにする</td><td>「1秒間に20°、時計の針と反対方向に進む」と黒板に板書し、掲示したグラフははずす。</td></tr>
<tr><td>点Qの動きをグラフからよみとらせる。</td><td>課題3
図2は60秒間の点Qの動きを示したものである。どのような動きをしていますか。

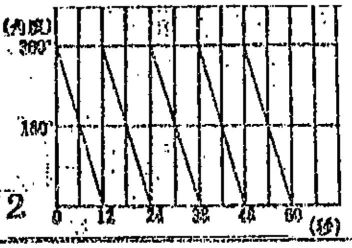
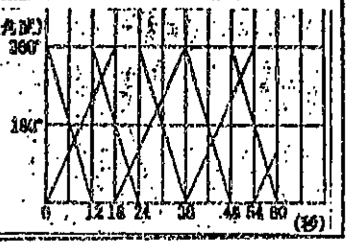
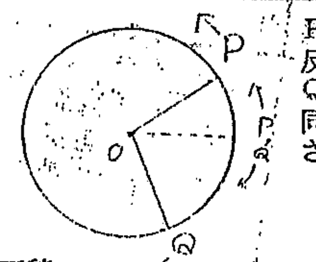
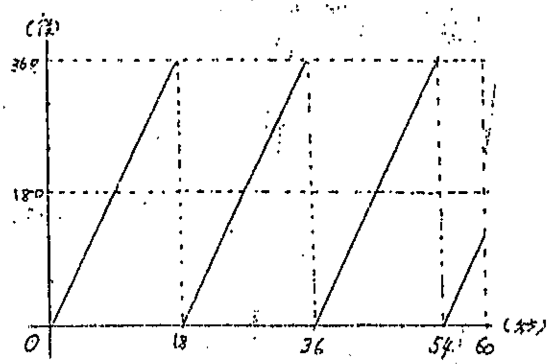



図2</td><td></td></tr>
</table>

指導内容	学習活動	指導上の留意点
	④ グラフからわかることを発表する ア．回転は時計の針と同じ方向 イ．１秒間に３０°進む ウ．一定の速さで回転する　など ⑤ 点Qの動きを点Pのグラフに重ねてかく	「１秒間に３０°、時計の針と同じ方向に進む」と黒板に板書し、掲示したグラフははずす。
２つのグラフから点P、Qの動きをよみとらせる。	課題４ 点Pと点Qが重なるのは６０秒間に何回ありますか。  	最初の状態は点Pと点Qが重なっていることを確認する。
	⑥ 重なる回数をグラフからよみとる	最初の状態を数にいれない。 グラフの交点は点Pと点Qが重なっているいることを示していることを確認する。
	⑦「５回目に重なるのは何秒後か。また、その位置はどこか。」を調べる。	生徒のかいたグラフで考えさせ、あとでOHPを使って説明する。
	課題５ 点Pと点Qの距離が最も大きくなるのは∠POQが何度のときか。また、それは６０秒間に何回ありますか。	後者の「～何回あるか」を答えられないときは、５秒のときの点P、Qの角度をグラフからよみとらせ、実際に教具の円板でしめしそこからグラフ上で、差に注目すればよいことを理解させる。

② 授業記録

昭和63年７月５日（火）実施　授業者　高村具彦　　対象　練馬区立開進四中２年Ｆ組

指導内容と教師の活動	生徒の活動と反応	備考
（透明なアクリルの円板と厚紙の円板を２枚重ねた図のような教具を黒板の前横にはり、円板を動かして見せる。）	 Ｐは時計の針と反対の方向、Ｑは時計の針と同じ方向に回転させる。	
「同じ大きさの２枚の円板をこのように重ねて動かすことにします。何が変わりますか。」	P_1　面積 P_1　線の間の面積　、おうぎ形の面積 P_2　おうぎ形の弧の長さ P_3　∠ＰＯＱの大きさ	（P_1の面積という発言をもとに教師が発問を続けて、おうぎ形の面積という言い方ができた。）
（右のグラフを模造紙にかいて、それを黒板にはる。）		
「今日は、点の動きの話をしたい。これは、点Ｐの動きを示したものです。グラフだけで、Ｐはどんな動きかわかるかな。角度は、時計の針と反対の方向を＋に、時計の針と同じ方向を－と約束しておこう。」	P_4　18秒で１周する。 P_5　時計回りの逆まわり。	（方向は、という，教師の発問によってP_5の意見が出る。）
「どうして時計の針と反対の方向とわかるかな。」（教具の円板を回しながら、点Ｐが時計の針と反対の方向であることを確認する。）	P_6　（答えず。） P_7　分かりません。	
「Ｐはこのように、ストン、ストンと動いているかな。スピードはどうだろう。１秒当たりどれだけかな。」	P_8　20°です。360°÷18 が 20° だから。 P_9　点Ｐは不規則に動いてはいない。 P_{10}　グラフの線が直線だから、一定だ。 P_{11}　真ん中で180°だから一定だ。	（実際に円板を不規則に動かしながら、発問する。）

「点Ｐの動きはこのようにまとめられるね。（右の事項を板書する。）」

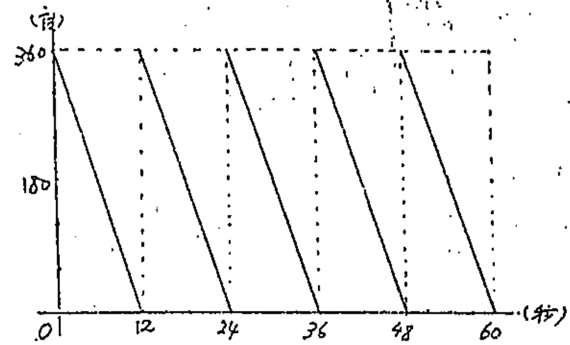
点Ｐの動きは、１秒間に20°の一定の速さで時計の針りと反対の方向に進む。

（はってあった、点Ｐの動きを示すグラフをはずす。）

（方眼紙を配る。）
「点Ｐの動きを示すグラフをかいてごらん。黒板のグラフを取りはずしたがだいじょうぶかな。点が動き出してから、60秒後までのようすをグラフにかきなさい。」

（生徒はなかなかグラフがかけない。1秒ごとで点をとっている者、原点と60秒後のとき360°の点を結んで直線を引いている者等が目立つ。しばらくして、教師がＯＨＰで点Ｐの動きを示したグラフを提示する。それを見て、生徒はグラフを完成する。）

（右のグラフを模造紙にかいて、それを黒板にはる。）



「点Ｑの動きがこのグラフのようだとすると、Ｑはどのように動いているかな。」

P_{12}　12秒で１周する。
P_{13}　１秒間に30°の速さだ。
P_{14}　一定の速さである。
P_{15}　時計と同じ向きに動いている。

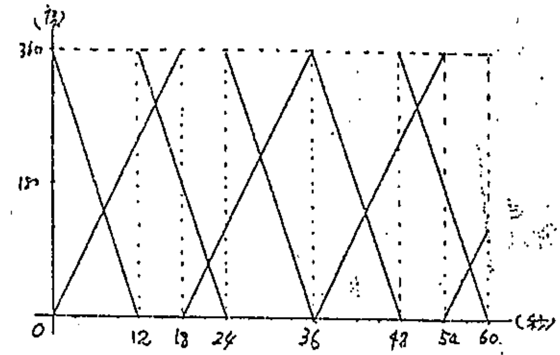
「点Ｑの動きはこうなるね。（右の事項を板書する。）」

点Ｑの動きは、１秒間に30°の速さで時計の針と同じ方向に進む。

（教具で点Ｑの動きを確認して板書する。）

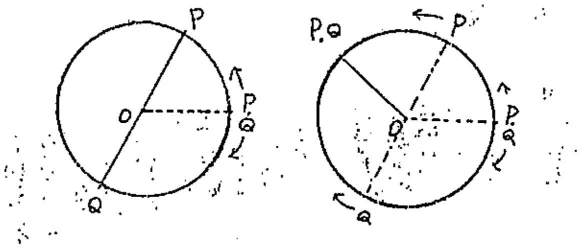
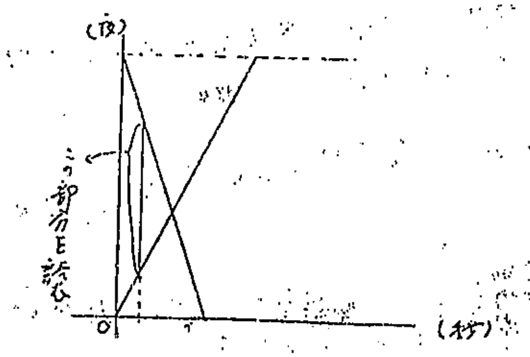
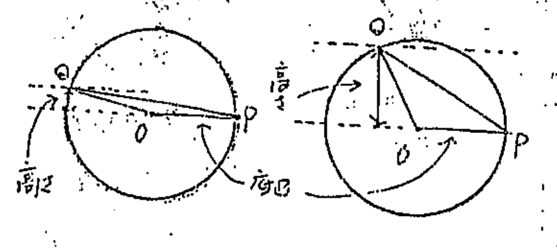
「点Ｑの動きを示すグラフを、さっきの点Ｐの動きを示すグラフの中にかきなさい。」

（生徒は作業をする。下のグラフをかく。）



（ＯＨＰで２つのグラフを重ねたものを写したままで、作業をさせる。）

「このグラフを見て、最初の点P，Qの位置はどうなっていたといえるかな。」	P_{15} スタートは同じ位置で、反対方向に回っている。	
「Pは0°で、Qは360°だけど、同じ位置から出発しているのですね、いいかな。」	（生徒は教師の説明を聞き、P，Qの動きを確認する。）	（ＯＨＰのグラフと円板の教具で確認する。）
「60秒間にP，Qは何回重なるかな。スタートのときは数えないことにするよ。」	P_{17} 6回 P_{18} 9回 P_{19} 8回	（ＯＨＰでグラフを提示し、発問する。）
「どうしてそのように言えるのかな。」	P_{20} グラフが重なっているところを数えた。	（グラフで確かめる。）
「1回、2回、・・・・あれ9回だよ。」	P_{21} 5回目はいっしょです。	
「5回目はふりだしに戻ったところだから、このグラフの2点は同じで8回重なることになる。」	（生徒は教師の説明を聞き、点が8回重なることをグラフで確認する。）	
「1回目に重なるのは何秒後かな、だいたいでいいよ。」	P_{22} 7秒とちょっと。	（グラフの上で確認する。）
「グラフで見当がつくね。計算でもでるが省略しよう。」		
「さて次に行くよ。線分ＰＱのことを弦というけど、この弦が一番長くなるのは、∠ＰＯＱが何度のときですか。」	P_{23} 180°です。	
「そう、直径になるときだね。このような状態は何回あるかな。」	P_{24} 13回 P_{25} 7回 P_{26} 8回 P_{27} 1回重なるまでに、1直線になることが1回ある。重なるのが8回あるから、8回です。	

「なるほど。１回重なるごとに１回 180° になることがある。このことを確かめてみよう。」（右のような図をかいて確かめる。）		
「このことをグラフで確かめてみよう。」（右図を板書して、ある時間のグラフの縦座標の差を読めばよいことを確認する。）		
「グラフの上で180° になるときを確かめてみよう。」	（生徒は教師の説明を聞き、グラフの上で確認する。）	（ＯＨＰのグラフで確かめる。）
「今度は、点Ｐ，Ｑを結んで、△ＰＯＱの面積が一番大きくなるのは、∠ＰＯＱが何度のときか考えて下さい。」	P_{28}　（答えられず。） P_{29}　179° です。180° よりちょっと小さい角度だから。	
「本当かな。確かめてみよう。」（右の図をかいて確かめる。）		（図で、底辺が等しいが高さが異なることを確かめる。）
「何度のとき、面積が一番大きくなるかな。」	P_{30}　90° です。	
「そうですね。90° になるのは何回あるかというような問題もグラフで確かめられますね。では、今日はこれで終わりにします。」		

⑧ 研究討議（昭和63年7月5日　高村真彦教諭研究授業）

・授業者から

全体的に内容が多く、急いで進んでしまった。生徒たちはよく反応してくれたが、課題５についてはどうしてよいか分らない生徒もいた。課題５で∠ＰＯＱが１８０゜になる回数を求めるとき、ＰＯとＱＯとが重なる前に必ず１回１８０゜になることから考えた生徒がいた。おもしろい考えだと思った。

・全体について

ア．全体的にはやい。課題４までの展で１時間と考えた方がよいのではないか。

イ．課題１を扱ってから課題３のグラフに入る方が、課題１をおいた意味が出てくるのではないか。

ウ．どの学年でこの内容を扱うことがよいかを検討する必要がある。

エ．第２学年の最後または第３学年の「いろいろな関数」で扱う方がよい。

・課題１について

ア．おもしろい題材だが基準線がないと難しい。

イ．円周上を点Ｐが２０゜の速さで動いていると言われても生徒にはピンとこない。また、時計の針と反対の方向だと教師があっさり言ってしまったが、方向については生徒に言葉でいわせるなどして、しっかりおさえることが大切だ。

・課題２について

ア．関数委員会の第２学年指導案「関数の利用」に動点の課題がある。そのとき、１秒ごとの点の位置や図形をかき表す、きめのこまかい指導をしている。その指導と同じように１秒ごとの点Ｐの位置や角度を図に表す指導をすれば、もっと課題についてのイメージを与えられ、グラフがよみとれてかけたと思う。

・課題３について

ア．ある生徒は、点Ｐと点Ｑが同じ方向に動いていると考えたのか、点Ｑの動くようすを表すグラフも原点を通るようにかいていた。また、指導者がかいたグラフを参考にせず一生懸命に計算をしながらグラフをかいていた生徒もみられた。

イ．課題２、課題３のグラフとも指導者がグラフを提示したにもかかわらず、計算をしてかいている生徒もいた。

ウ．点Ｐと反対の方向に動くことをマイナスと考えて、グラフをかかせてはどうか。

・課題５について

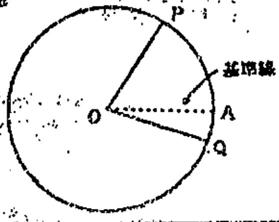
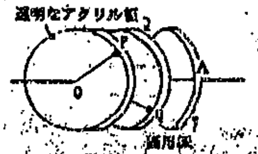
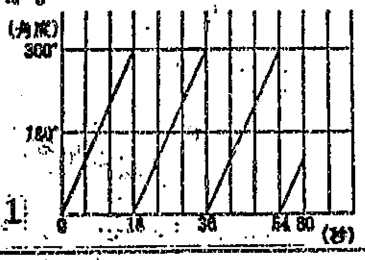
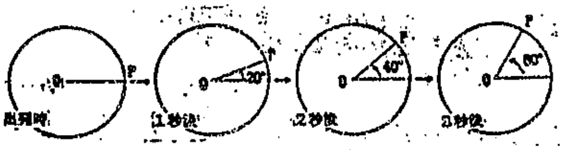
ア．点Ｐと点Ｑが重なるときが８回だから、１８０゜になるのは１つ少なくて７回と答えた生徒がいた。正確には８回だが、よく考えたと思う。授業では、その考えを認めながらグラフで確認するという指導の流れをとった。適切な指導である。多角的にものをみさせることは大切だと思う。

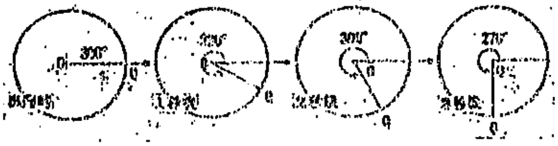
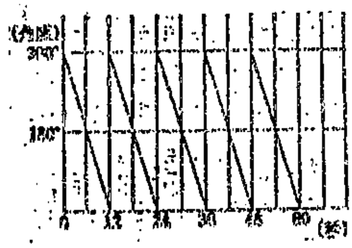
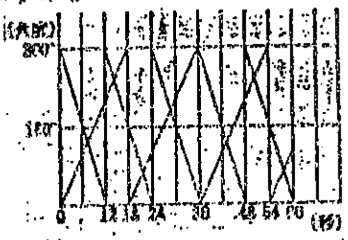
イ．∠ＰＯＱが１８０゜になる場合をみつけるには、２点のｙ座標の差が１８０゜に相当する長さのところを調べればよいのだろうか。それは学年によって異なると思う。１年では今日のように指導し、２年では変域で区切り、式で求めることになるのだろうか。

ウ．２０゜と３０゜の和５０゜を考え、ｙ＝５０ｘのグラフから考えさせればどうか。

エ．今日の指導では、グラフから差が０゜だけでなく１８０゜、９０゜も同じようにみられることを理解させることが大切だと思う。

④ 改訂指導案

指導内容	学習活動	指導上の留意点
課題を提示する。	課題1 同じ大きさの2枚の円板が重ねてある一方の円板の周上に点P、他方の円板の周上に点Qの印をつけて回転させる。 何が変わりますか。  	 上のような教具を示しながら提示する。 「何が変わるか」という発問にとまどう生徒がいるときは一例をあげる。
	① 変わるものをあげる ・弧PQの長さ ・∠POQの大きさ ・∠POAの大きさ ・∠AOQの大きさ ・おうぎ形POQの面積 ・弦PQの長さ　　など	点Pは時計の針と反対方向に回転することを強調し課題2につなげる。 (時計の針と反対方向に回転する角度を増えるとする)
点Pの動きをグラフからよみとらせる。	課題2 図1は基準線OAからの点Pの動きを示したものである。どのような動きをしていますか。  図1	
	② 点Pの動きについて考える ア。何秒間のグラフか イ。回転は右回りか、左回りか ウ。1秒間に何度進か エ。一定の速さで回転しているか	これらのことをグラフで確認する。
	 	出発時、1秒後、2秒後3秒後の図を示す。
	③ 点Pの動きをグラフにする	「1秒後に20°、時計の針と反対方向に進む」ことを板書し、掲示した図1をいったんかくしてから生徒にかかせる。

指導内容	学習活動	指導上の留意点
条件からグラフをかかせ、その意味を考えさせる。	**課題3** 点Qは基準線OAから1秒間に30°の速さで時計と同じ方向に進んでいる。グラフをかきなさい。ただし、60秒後までとします。	角度はOAから時計の針と反対方向にはかった角度を記入させる。
	④ 出発時、1秒後、2秒後、3秒後の点Qの位置を図の中にかきこませる。 	円だけをかいたプリントを配布し、それにかきこませる。 出発時、1秒後、2秒後3秒後の図を示す。
	⑤ 図を見ながらグラフをかく。 	点QについてのグラフをOHPでみせる。 点P、Qについてグラフを別々の色でかき、OHPで重ねてみせる。
2つのグラフから点P、Qの動きをよみとらせる。	**課題4** 点Pと点Qが重なるのは60秒間に何回ありますか。 	最初の状態は点Pと点Qが重なっていることを確認し、これを数に数えない。 生徒のかいたグラフで考えさせ、後でOHPを使って説明する。
	⑥ 交点の意味を考える	36秒後のときを何回と数えるかをていねいにあつかう。
(時間に余裕があれば)	・点Pと点Qの距離が最も大きくなるのは∠POQが何度のときか。また、それは60秒間に何回ありますか。 ・△POQの面積が最も大きくなるのは∠POQが何度のときか。また、それは60秒間に何回ありますか。	後者の「〜何回あるか」を答えられないときは、5秒のときの点P、Qの角度グラフからよみとらせ、実際に教具の円板で示し、そこからグラフ上で、差に注目すればよいことを理解させる。

3　今後の課題

本委員会は、今後、次の点について研究を続けていこうと考えている。

（１）　現在の中学校での関数教育の問題点や、小学校や高等学校での指導の実際をふまえて、中学校３か年を見通した関数カリキュラムについてのより綿密な検討を行う。そして、それにしたがって指導計画や指導案を、授業研究を通して実証的に検討する。その際、特に小学校と中学校との関連を配慮する。

（２）　今年度の研究の中心でもある「関数の利用」の指導（関数の考えを使った課題解決時の指導）についての検討を続け、適切な課題を工夫して、関数領域において数学的な考え方を一層伸ばす指導を追究する。

さらに、そこでの考察をもとに、他領域との関連も考えて、総合的な課題解決力を伸ばすための指導について考察する。

（３）　関数領域以外で、関数的な考え方を伸ばすのにふさわしい指導場面について検討する。そして、そこでの指導と関数領域での指導との関連を明らかにして、より適切な関数指導を追究する。

（４）　一人ひとりの生徒の関数概念についての理解は、どのように高まり深まるのかを考察する。そして、生徒の関数概念についての理解を高めるには、どのような内容をどのように指導すればよいかについての実証的検討を行う。

＝東京都中学校数学研究会研究部　関数委員会＝

岩木敬二郎	元板橋区立中台中	居駒　永信	中野区立北中野中
遠藤　国雄	板橋区立上板橋三中	奥田佐夫郎	新宿区立西戸山二中
小沢　慶晃	多摩市立多摩中	風間喜美江	墨田区立本所中
国宗　　進	東京学芸大附属世田谷中	五島　芳夫	港区立芝浜中
坂本　和良	新宿区立淀橋二中	重盛健一郎	多摩市立西永山中
須藤　哲夫	品川区立東海中	関　富美雄	品川区立八潮中
相馬　朋幸	板橋区立高島第一中	高木登美子	江東区立東陽中
高村　真彦	練馬区立開進第四中	野依　六郎	東京都立教育研究所
橋爪　昭男	中央区立第四中	浜仲　　章	三鷹市立第六中
半田　　進	東京学芸大附属小金井中	山田　武司	板橋区立板橋三中
吉田　直樹	新宿区立牛込第一中	渡辺　英俊	奥多摩町立小河内中