「変化の割合」の指導について

東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

ページ

１．研究の経過とねらい

本委員会では、平成１２年度まで、中学校関数指導について具体的・実践的な指導計画や指導案を作成し、授業を通して実証的に検討を行ってきた。また、各学年における評価の観点と評価問題の作成、実施、検討も行った。それらの研究の経過を経て関数カリキュラムを検討していく中で、評価問題の実施結果から「変化の割合」の理解が弱いことが明らかになった。

そこで、「変化の割合」の意味の理解や、その概念の育成をねらいとして、次の経過で研究授業を通して指導内容・計画等の研究を進めている。

・平成１３～１４年度　：　第２学年の１次関数を中心として
・平成１５～１６年度　：　第３学年の関数を中心として

２．研究内容

（１）第２学年での「変化の割合」の位置付け

これまでは「変化の割合」の定義を含め、「変化の割合」の指導を、１次関数の定義の指導直後に行うのが普通であった。この指導では、「変化の割合」の意味の理解が不十分なままグラフの指導に入るため、「変化の割合」「グラフの傾き」「ｙ＝ａｘ＋ｂのａの意味」がばらばらの知識となって、それぞれが一体化した理解にまで至らない生徒が多くいた。

そこで、「変化の割合」の概念や意味を理解させることをねらいとして、次のような視点で指導内容と指導計画の再検討を行った。

ア．離散量と連続量の２つの課題を扱う。 イ．具体的な事象を通して、変化のようすを調べ、「変化の割合」の意味を理解させる。単に形式的な「変化の割合」を求めるだけの指導は行わない。 ウ．「変化の割合」の定義の指導は、その意味を理解する学習の後で行う。 エ．「変化の割合が一定である」ことを丁寧に指導する。 オ．「変化の割合が一定な関数のグラフは直線である」ことを丁寧に指導する。

つまり、１次関数の定義の指導後、「変化の割合」の定義を形式的に与えるのではなく、具体的な事象の考察を通して、「変化の割合」の概念や意味を理解させる指導を丁寧に行った。さらに、グラフの指導を行い、「変化の割合」の概念が高められていくなかで、「変化の割合」の定義を行った。

この指導により、「変化の割合」「グラフの傾き」「ｙ＝ａｘ＋ｂのａの意味」が一体化した理解にまで至った生徒が多くなった。

（２）第３学年指導計画と指導内容の作成の視点

第２学年の「変化の割合」の指導では、

・どの区間においても「変化の割合」が等しいこと、つまり「変化の割合」が一定であること

・「変化の割合」がｙ＝ａｘ＋ｂのａの値と等しいこと

を理解させてきた。第３学年においても同じように、「変化の割合」が「$y=ax^2$のａ」と混同している生徒がいる。また、そのグラフ上での「変化の割合」の意味について理解していない生徒が多い。

そこで、第３学年においても、具体的な事象の考察を通して、関数$y=ax^2$における「変化の割合」の概念や意味の理解を深めさせることをねらいとして、指導内容と指導計画の再検討を行った。その結果、第３学年での指導の流れを、第２学年と同じように２次関数の定義、「変化の割合」の素地的な学習、グラフ、「変化の割合」の定義の順で指導を行うことにした。しかし、「変化の割合」の素地的な学習は、本委員会の第２学年の変化の割合の指導の成果から、第３学年では省略してもよいという結論に至った。そして、「変化の割合」の意味や定義の理解を深めさせるための指導を、グラフの指導を行った後に位

置付けた。指導計画を「変化の割合」に関することについて、次の視点で改訂した。

ア.「変化の割合」を求めるときに、そのよさや必要性がわかる、より適切で具体的な事象の課題を扱う。

イ. 具体的な事象を通して、変化のようすを調べ、さまざまな区間の「変化の割合」を求めるような指導の工夫を行う。第２学年で学習した「変化の割合」の意味や求め方を振り返らせ、関数$y=ax^2$では１次関数の場合と違って、その「変化の割合」は一定ではないことを扱う。

ウ.「平均の速さ」の考えを通して、「変化の割合」の理解を深める指導を行う。これまでの速さの概念から平均の速さの概念へと高まる学習内容を丁寧に扱う。

エ. 関数$y=ax^2$では区間の幅が同じとき、それぞれの区間の「変化の割合」が等しくないことを意識させる。

オ. 関数$y=ax^2$において、yの増加量が同じでもxの増加量やその「変化の割合」は同じとは限らないことを扱う。

カ. 関数$y=ax^2$において、「変化の割合」が同じ場合の意味を扱う。

（３）第３学年第５時の留意点

「変化の割合」の具体的な事象として、平均の速さを扱う場面を考えた。課題として、日常生活の場面であること、変化の割合が実感できること、変化の割合が一定であるものと比較できるものとして、指導案にあるような自転車の課題を考えた。

工夫した点として

- グラフは連続したものでなく、一部の点のみを表した。
- 課題のグラフは、一見すると放物線のように見えるが、放物線と直線をあわせたグラフである。
- 変化の割合の必要性を実感させるために、各区間の変化の割合の違いを丁寧に扱った。
- 平均の速さを段階を追って指導し、定義した。
- 指導案を作成するにあたり、課題場面とその発問の検証授業を行った。指導案の生徒の反応は、その授業で出てきたものである。

がある。

（４）第３学年第６時の留意点

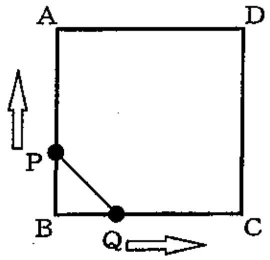
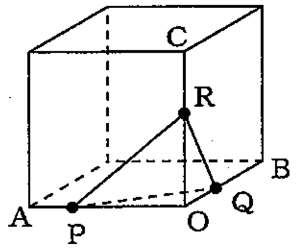
「変化の割合」を求めるときに、xの区間を意識し、変化の様子に着目するような指導となるようにした。課題は、数直線上を原点Ｏを基準に動く点Ｐと、ＯＰを一辺とする正方形の面積について考えるという、生徒にとって複雑でなくとらえやすいものとした。

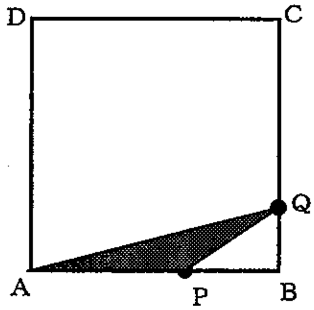
工夫した点として

- 「変化の割合」の意味が、具体的な場面で視覚的にとらえやすいようにした。
- 扱いやすく多様な考え方が出るような課題を提示した。
- xの増加量やyの増加量を意識させることによって、「変化の割合」の意味を深めさせる。

がある。

（5）第３学年指導計画

時数	項　目	学　習　内　容
1	２次関数	［課題場面］１辺が８cmの正方形ＡＢＣＤがある。点Ｐは頂点ＢからＡを通って点Ｄまで、点Ｑは頂点ＢからＣを通って頂点Ｄまで同時に出発し、それぞれ１秒間に２cmの速さで動く。 ①何が変わるかを考える。 ②時間と面積（△ＰＢＱ，五角形ＰＡＢＣＱ）との関係を調べる。 表で１次関数とは違う変化の関数であることを確認する。 式：$0 \leqq x \leqq 4$のとき　$y = 2x^2$ $4 \leqq x \leqq 8$のとき　$y = -2x^2 + 32x - 64$
2		①２次関数の定義 ②具体的な例（立方体の表面積、高さ一定の正四角すいの体積）について立式する。 ③$y = x^2$のグラフがどんな形になるか予想する。
3	関数 $y = ax^2$ のグラフ	①$y = x^2$のグラフを完成させる。 ②$y = 2x^2$ のグラフをかき、$y = x^2$のグラフと比べる。 ③$y = x^2$のグラフをもとに、$y = 1/2x^2$のグラフをかく。
4		①$y = -x^2$ のグラフをかき、$y = x^2$のグラフと比べる。 ②$y = -x^2$のグラフをもとに、$y = -2x^2$のグラフをかく。 ③$y = -x^2$のグラフをもとに、$y = -1/2x^2$のグラフをかく。 ④関数$y = ax^2$のグラフの特徴を、１次関数との比較、増減の話などを含めてまとめる。
5	変化の割合	**（6）第5時　指導案　参照**
6		**（7）第6時　指導案　参照**
7		人と三輪車が同時に坂道を下りるときの時間と距離の関係を表すグラフをよみとり、問題を解決する。（等速運動と等加速運動）
8	練習問題	
9	いろいろな関数	［課題場面］右の図のような１辺が10cmの立方体がある。点Ｐ、Ｑ、Ｒはそれぞれ辺ＯＡ、ＯＢ、ＯＣ上の点である。 ①次のそれぞれの条件についてｘとｙとの関係を調べる。 （ｉ）点Ｑ、ＲはＯＱ＝４cm、ＯＲ＝６cmの位置に停止し、点Ｐは頂点Ｏを出発してからｘ秒後の三角すいＲ－ＰＯＱの体積をy cm^3 とする。（$y = 4x$）

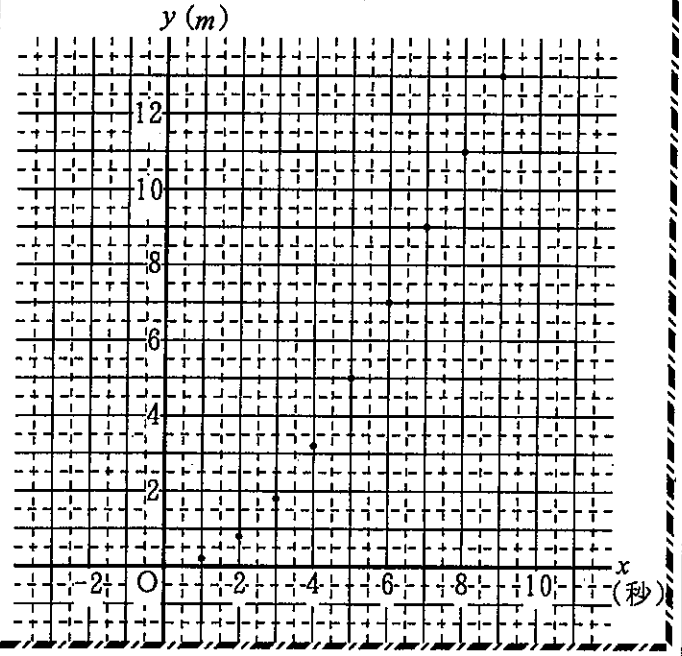
		（ⅱ）点ＲはＯＲ＝６㎝の位置に停止し、点Ｐ、Ｑは頂点Ｏを同時に出発し、それぞれ毎秒１㎝の速さでＡ，Ｂまで動く。点Ｐ、ＱがＯを出発してからｘ秒後の三角すいＲ－ＰＯＱの体積をｙcm^3とする。 $(y=x^2)$ （ⅲ）点Ｐ，Ｑ，Ｒは頂点Ｏを同時に出発し、それぞれ毎秒１㎝の速さでＡ，Ｂ，Ｃまで動く。点Ｐ，Ｑ，ＲがＯを出発してからｘ秒後の三角すいＲ－ＰＯＱの体積をｙcm^3とする。 $(y=1/6x^3)$ ②$y=4x$、$y=x^2$、$y=1/6x^3$の値の変化を表で調べる。
10		（ⅳ）前時の課題場面で、１点ＲはＯＲ＝６㎝に停止しており、１点Ｐは毎秒１㎝の速さでＡまで動く。そのとき点Ｑは三角すいＲ－ＰＯＱの体積が６cm^3で一定になるように動く。点ＰがＯを出発してからｘ秒後のＯＱの長さをｙ㎝とする。ｘとｙとの関係を調べる。 $(y=6/x)$ ③$y=6/x$ について、変化や対応のようすを調べる。 ④$y=4x$, $y=x^2$, $y=1/6x^3$, $y=6/x$のグラフについて調べる。
11	グラフのよみ	［課題］ある電話会社３社の料金は次のようになっている。 Ａ社：３０秒ごとに２０円加算される Ｂ社：１６秒ごとに１２円加算される Ｃ社：７秒ごとに５円加算される （１）どこの会社の料金が一番安いかを考える。 （２）通話時間と料金の関係のグラフを考え、さらによみとる。 （３）グラフを利用して、どの会社が得であるかを考える。
12		①前時の課題において、次の問題を解決する。 ［問題１］最初の２０秒間は３０円だが、その後は２０秒毎に８円加算されるＤ社が他の会社より安くなる時間を求める。 ［問題２］ある３家が違うかけ方で、１日に合計４００秒話したときの料金の比較を行う。 ②第11時の課題を通して、対応の特徴から関数の定義をし、関数の例を見つける。 ③関数にならない例について考える。
13	関数の利用	［課題場面］右の図のように、１辺が３０㎝の正方形ＡＢＣＤがある。点ＰはＡを出発して毎秒５㎝の速さでＢを通りＣまで動く。点ＱはＢを出発して毎秒２㎝の速さでＣまで動く。  ①△ＡＰＱの面積がどのように変化しているか、気づくことをあげる。 （ⅰ）△ＡＰＱの面積が最大になるのは何秒後かを考える。 （ⅱ）△ＡＰＱの面積が45cm^2になるのは何回あるかを考える。 （ⅲ）△ＡＰＱの面積が125cm^2になるのは何秒後かを考える。 ②グラフを利用することのよさを実感する。 ③いろいろな関数があることを知る。
14	問題練習	問題練習（グラフを通してｘの変域からｙの変域を求める問題を含む） レポート（関数の具体例を探し、考察する課題）の説明
15	発表会	レポートの発表・討論、相互評価

（6）第３学年第５時 指導案

本時のねらい

・自転車をこぎ始めたときからの時間と距離の関係について調べ、変化の割合の必要性やよさを理解する。

・変化の割合の意味を理解する。

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
課題を把握する	**課題場面** 下の点は、A君が自転車をある地点からこぎ始めたときからの時間と進んだ距離について調べたものである。  	・ワークシートを配る。
グラフをよみとる	(1)これを見て、わかることをあげなさい。 ①グラフの形状に着目した生徒 ア 曲線になっている。 イ 放物線になっている。 ウ $y=ax^2$のグラフになっている。 エ 途中から直線になっている。 ② 量的なものに着目した生徒 ア ｘが増えるとｙも増える。 イ １秒間に動く距離が増えている。 ③ 変域に着目し、分類している生徒 ア ５秒後から進む距離が一定である。 イ ５秒からは速さが変わらないグラフである。 (2) はじめの５秒とそれ以降とでは、何が違いますか。 ア ５秒までは１秒あたりの間隔がどんどん増える。 イ ５秒から１秒あたり２ｍずつ一定に進む。 ウ ５秒からは直線になっている。	・(1)③の生徒の意見を取りあげる。
変化のようすを調べる	(3) グラフをよみとりながら、表を完成させ、変化のようすを確認する。	

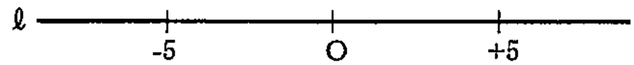
	$\begin{array}{c|cccccccccc} & & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline y & 0 & 0.2 & 0.8 & 1.8 & 3.2 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ & & +0.2 & +0.6 & +1 & +1.4 & +1.8 & +2 & +2 & +2 & +2 \end{array}$	・グラフを教師と生徒で確認しながら、値を与える。
区間の幅が2における速さについて考える	課題１ この課題場面において、次の①～④の区間のうち、どの区間が速いですか。また、その理由も考えましょう。 ① １秒から３秒の間　② ３秒から５秒の間 ③ ５秒から７秒の間　④ ７秒から９秒の間 (4) それぞれの区間の速さを求める。 ① (1.8－0.2)／(３－１)＝０.８ ② (５－1.8)／(５－３)＝1.６ ③ (９－５)／(７－５)＝２ ④ (13－９)／(９－７)＝２ ア グラフから、２点を結びその傾きで判断する。 イ いずれも同じ時間なので、表を見て進んだ距離から判断する。	
平均の速さを定義する	ある区間の中では、どのように変化をしているかにかかわらず、その区間でのかかった時間と進んだ距離で、下のようにして求めるものを平均の速さとする。 $\boxed{\text{平均の速さ} = \dfrac{\text{進む距離}}{\text{かかった時間}}}$	
平均の速さを求める	課題２ この課題場面において、次の①～③の区間の平均の速さを求めましょう。 ① ０秒から３秒の間　② ２秒から５秒の間 ③ ０秒から５秒の間 (5) 平均の速さを求める。 ① (1.8－０)／(３－０)＝０.６　<u>０.６m／秒</u> ② (５－0.8)／(５－２)＝1.４　<u>1.４m／秒</u> ③ (５－０)／(５－０)＝１　<u>１m／秒</u>	・0～1秒は0.2m／秒, 1～2秒は0.6m／秒・・・のように考える生徒には、０～５秒トータルとして考えるように伝える
平均の速さを通して、変化の割合の定義を再確認する	ある時間からある時間までの平均の速さは、その $\dfrac{\text{進んだ距離（yの増加量）}}{\text{かかった時間（xの増加量）}}$ であることを確認する。 さらにそれが、その区間の変化の割合であることを確認する。	・この値が一定ではないことを、一次関数との比較をしながら確認する。

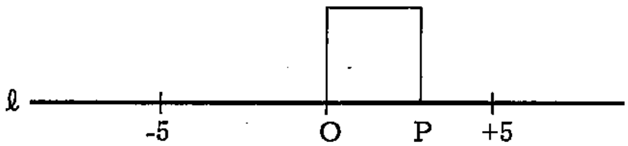
（7）第３学年第６時 指導案

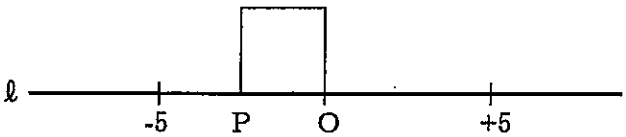
本時のねらい

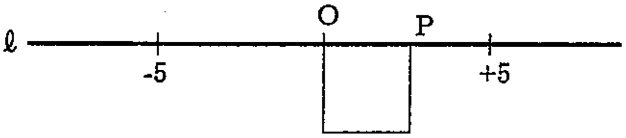
・「変化の割合」を求めるときに、区間を意識させる。

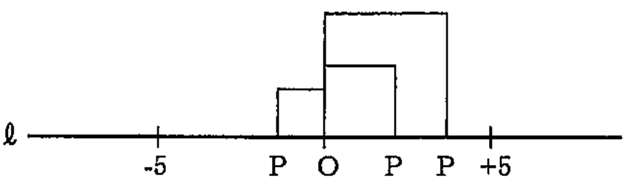
・$y=ax^2$において、ｙの増加量が同じでもｘの増加量、さらに変化の割合も異なることを理解させる。

<table>
<tr><th>学習活動</th><th>主な発問と予想される生徒の反応</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>課題を把握する</td><td>課題場面
数直線ℓ上を毎秒１cmの速さで正の方向に動く点Ｐがある。原点Ｏを基準として、ｘ秒後のＯＰの長さを一辺とする正方形を考える。
ｘ秒後のＯＰを一辺とする正方形の面積を$y\,\mathrm{cm}^2$とする。


(1) ＯＰを一辺とする正方形をかき入れてみよう。
ア　Ｐの座標を正にとった場合


イ　Ｐの座標を負にとった場合


ウ　Ｐの座標を負にとり、正方形を下にかいた場合

</td><td>・ワークシートを配る。

・このように考えた生徒にも、面積は同じになることを確認する。</td></tr>
<tr><td>ｘとｙとの関係を表で考える</td><td>(2) 発表する

</td><td>・板書のℓ上に、Ｐや正方形を書きこむ。</td></tr>
</table>

(3) xとyの関係を表に表してみよう。

ア

x	0	1	2	3	4	・・・
y	0	1	4	9	16	・・・

イ

x	1	2	3	4	・・・
y	1	4	9	16	・・・

ウ

x	・・・	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	・・・
y	・・・	9	4	1	0	1	4	9	16	・・・

・$y=x^2$の式も考える生徒を取り上げる。このとき、式も全体で確認する。

(4) 表から、xの増加量やyの増加量、変化の割合などについて、気づくことをあげてみよう。

ア　yはxを2乗した数になっている。

イ　xが2倍, 3倍・・・・になると、yは4倍, 9倍・・・になっている。

ウ　変化の割合は一定ではない。

エ　xの値が＋でも－でも、yの値は同じになる。

オ　xが正の数でも負の数でも、yは正の数。

・あまり深入りはしない。

x，yの増加量が決まっているときのxの区間を考える

(5) xの増加量が1のとき、yの増加量が15になるのは、何秒後から何秒後ですか。

ア　表をかいて求める。

	+1	+1	+1			+1	
x	0	1	2	3	・・・・・・・・	7	8
y	0	1	4	9	・・・・・・・・	49	64
	+1	+3	+5			+15	

イ　方程式を作り、求める。

$$(x+1)^2-x^2=15$$
$$x^2+2x+1-x^2=15$$
$$2x+1=15$$
$$x=7$$

7秒後から8秒後

ウ　方程式を作り、求める。

$$x^2-(x-1)^2=15$$
$$x^2-x^2+2x-1=15$$
$$2x-1=15$$
$$x=8$$

7秒後から8秒後

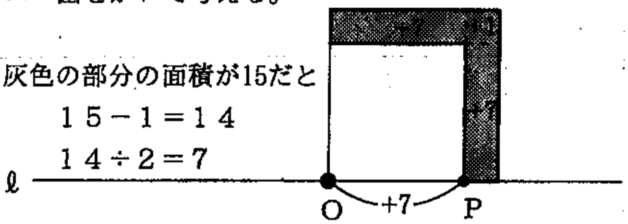
・何をしたらよいか分からない生徒には、表をかくよう机間支援をする。

エ　図をかいて考える。

灰色の部分の面積が15だと

$15-1=14$

$14\div 2=7$



7秒後から8秒後

yの増加量だけが決まっているときのxの区間を考える	(6) yの増加量が24になるのは、何秒後から何秒後ですか。

ア　表をかいて求める。

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

+1 +3 +5 +7 +9 +11 +13 +15 +17

+24 +24

1秒後から5秒後，5秒後から7秒後

イ　方程式を作り、求める。

$(t+1)^2-t^2=24$

$t=11.5$　　11.5秒後から12.5秒後

ウ　方程式を作り、求める。

$(x+a)^2-x^2=24$

$x^2+2ax^2+a^2-x^2=24$

$a^2+2ax=24$

$a(a+2x)=24$

$a=1$のとき、$x=11.5$　　11.5秒後から12.5秒後

$a=2$のとき、$x=5$　　5秒後から7秒後

$a=3$のとき、$x=2.5$　　2.5秒後から5.5秒後

$a=4$のとき、$x=1$　　1秒後から5秒後

エ　方程式を作り、求める。

$t^2=y^2+24$

$t^2-y^2=24$

$(t-y)(t+y)=24$

$4\times 6 \rightarrow (5-1)(5+1)=24$

$2\times 12 \rightarrow (7-5)(7+5)=24$

1秒後から5秒後，5秒後から7秒後

オ　まずは、１秒後から５秒後までのときは２４増加することを暗算で求めて、下の図のように１秒ごとにずらして、ｙの増加量が２４になるところを探す。

x	0	1	$2\sqrt{6}$ $\sqrt{24}$	5
y	0	1	24	25

+24　+24

区間に対応した変化の割合を求める

(7)　１秒後から５秒後まで、５秒後から７秒後までの変化の割合をそれぞれ求めなさい。

（１秒後から５秒後まで）

$$\frac{5^2-1^2}{5-1}=\frac{24}{4}=6$$

（５秒後から７秒後まで）

$$\frac{7^2-5^2}{7-5}=\frac{24}{2}=12$$

ｙの増加量が同じでも、ｘの増加量や変化の割合が異なることにふれる。

区間によって変化の割合が異なることを確認する

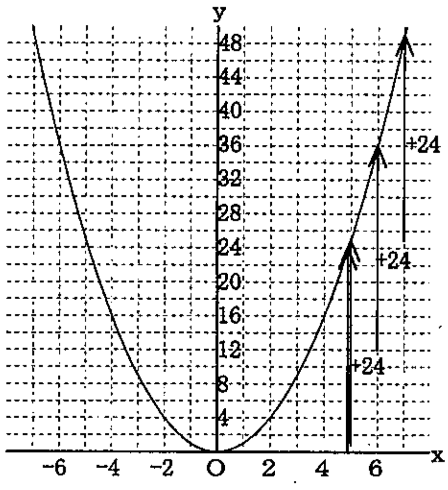
(8)　(7)で求めた変化の割合の意味を確認しよう。

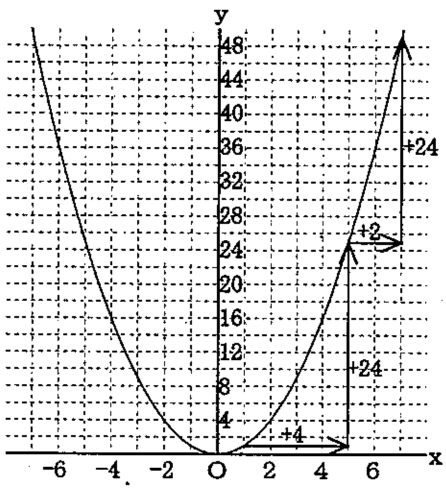
ア　区間によって、変化の割合は違う。

イ　ｙの増加量は同じだが、変化の割合は違う。

変化の割合の意味をグラフで確認する

(9)　（$y=x^2$のグラフを提示し）これまで求めてきた変化の割合の意味を、グラフで確認しよう。





（８）第３学年第６時の研究授業（第１回）

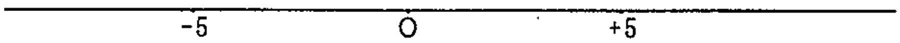
Ⅰ．授業記録

◎対象：江東区立深川第四中学校３年１組　男子１９名 女子１６名 計３５名
◎授業実施：平成１５年１１月　７日　第１校時
　　　　　　　　　　　１１月１０日　第３校時（１０分位）
◎授業者：江東区立深川第四中学校　　風間　喜美江　教諭

Ｔ：(課題場面がかかれているプリント配布)

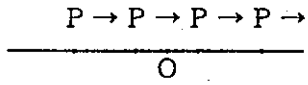
課題場面

数直線L上を毎秒１cmの速さで正の方向に動く点Ｐがある。原点Ｏを基準として、ｘ秒後のＯＰの長さを１辺とする正方形を考える。
ｘ秒後のＯＰを１辺とする正方形の面積をｙcm^2 とする。

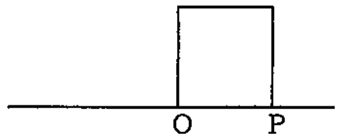


Ｔ：課題を読んでください。
Ｐ：（課題を読む）
Ｔ：正の方向の動くってどういう動きですか。
P_1：（本人から見て左から右の手を動かし）こんなふうです。

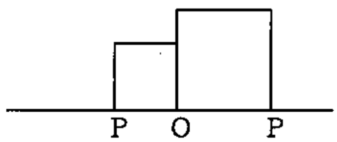
Ｔ：はい。このようですね。
（マグネットを使って点Ｐの動きを示す。）



（１）Ｔ：では、ＯＰを１辺とする正方形をこれにかきいれてください。
（２）P_2：はい。（黒板に右図をかく）
P_3：先生。Ｐの位置はﾏｲﾅｽでもいいですか。
Ｔ：ﾏｲﾅｽのところにＰを決めて正方形をかいた人いますか。



Ｐ：(３～４人挙手)
Ｔ：では、Ｐさん、それを黒板にかいてください。
P_4：（右図を示し）このようになります。



（３）Ｔ：原点Ｏを基準として、ｘ秒後の正方形の面積をｙcm^2とします。ｘとｙとの関係を表に表してみましょう。
板書：原点Ｏを基準とし、ｘ秒後の正方形の面積をｙcm^2とする。ｘとｙとの関係を表に表しなさい。

Ｐ：(板書を写す)

P_5：

x	0	1	2	3	4・・・
y	0	1	4	9	16・・・

P_6：

x	1	2	3	4	・・・
y	1	4	9	16	・・・

P₇：

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5・・・
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25・・・

Ｐ：（表に式 $y=x^2$ を添えてかいている生徒が３割近くいた。）
Ｔ：式もかいてくれて人がいますね。ｘとｙの関係の式はどうなりますか。
P_8：$y=x^2$ です。

（４）Ｔ：表から、ｘの増加量やｙの増加量、変化の割合などについて考えてください。気づくことはありますか。
Ｐ：・ｘとｙは比例している。
・ｙはｘの２乗した数になっている。
・ｘが２倍、３倍になるとｙは４倍、９倍になっている。
・ｘが増えるとｙは増えるまたは減る。
・変化の割合は一定ではない。
・ｘの値が＋でも－でもｙの値は同じ。
・ｘが負の数でもｙは正の数。・・・

（５）Ｔ：ｘの増加量が１のとき、ｙの増加量が１５になるのは何秒後から何秒後ですか。
P_9：方程式をつくり求める。

$$(x+1)^2-x^2=15$$
$$x^2+2x+1-x^2=15$$
$$2x+1=15$$
$$x=7$$

答　７秒後から８秒後

P_{10}：方程式をつくり求める。

$$x^2-(x-1)^2=15$$
$$x^2-x^2+2x-1=15$$
$$2x-1=15$$
$$x=8$$

答　７秒後から８秒後

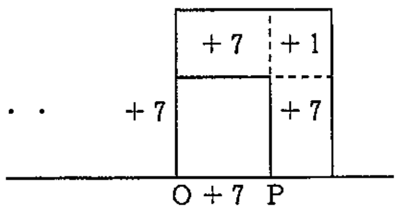
P_{11}：表をかいて求める。

+1　+1　+1　　　　+1

x	0	1	2	3	・・・7	8
y	0	1	4	9	・・・49	64

+1　+3　+5　　　　+15

Ｔ：他の考え方で求めた人はいますか。
Ｐ：（反応なし）
Ｔ：例えば図をかいて・・・
（右図を板書）
の部分が＋15だから15－１＝14
14÷２＝７
だから、７秒後から８秒後という考えは・・・
P_{12}：そうか、そんな考え方もできるね。



(６)Ｔ：では、ｙの増加量が２４になるのは、何秒後から何秒後ですか。

P_{13}：暗算で答　１秒後から５秒後のとき２４増加することを求めてから下のように１秒ごとにずらしてｙの増加量が２４になるときを探す。

x	0	1	·	$\overset{2\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$	5
y	0	1	· ·	24	25

+24

+24

答　たくさんある。

x	1	2 · ·	$\overset{2\sqrt{7}}{}$	
y	1	4 · ·	$\sqrt{28}$	28

ら秒後

+24

例)１秒後から５秒後
0　$2\sqrt{6}$　秒後か
２秒後か　$2\sqrt{7}$　ら秒後

P_{14}：表をかいて求める。

	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
x	0 → 1	2	3	4	5	6	7	8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64
	+1	+3	+5	+7	+9	$\boxed{+11}$	$\boxed{+13}$	+15	

+24　　+24

答　１秒後から５秒後、５秒後から７秒後

P_{15}：式をつくり求める。（ｔが小数になったときは考えていた。）

$$(x+a)^2-x^2=24$$
$$x^2+2ax+a^2-x^2=24$$
$$a^2+2ax\quad=24$$
$$a(a+2x)=24$$

$1\times24\to a=1\quad x=\frac{23}{2}$　　11.5秒後から12.5秒後

$2\times12\to a=2\quad x=5$　　５秒後から７秒後

$3\times8\ \to$

$4\times6\ \to$

$6\times4\ \to$

P_{16}：次の式をつくり求める。

（ｔが小数になり自信がなさそうにしていた。）

$(t+1)^2-t^2=24$、$t=11.5$　　11.5秒後から12.5秒後

P_{17}：(いろいろ計算して)

$12.5^2-11.5^2=24$　　11.5秒後から12.5秒後

P_{18}：$(x-a)^2+24=x^2$

$x^2-2ax+a^2+24=x^2$

$-2ax+a^2+24=0$

・・・？

P_{19}：$t^2=y^2+24$

$t^2-y^2=24$

$(t-y)(t+y)=24$

$4\times6\quad\to(5-1)(5+1)$

$2\times12\quad\to(7-5)(7+5)$

$3\times8\quad\to$

２) ２４
２) １２
２) 　６
　　　３

答　１秒後から５秒後、５秒後から７秒後

（次時）

Ｔ：ｙの増加量が２４になるのは、いろいろありましたね。
（前時に出た考え方を生徒に発表させ紹介する。）

（７）Ｔ：では、１秒後から５秒後までの変化の割合はどうなりますか。

P_{20}：$\frac{24}{4}$から６になります。

Ｔ：５秒後から７秒後までの変化の割合は・・・

P_{21}：$\frac{24}{2}$で１２になります。

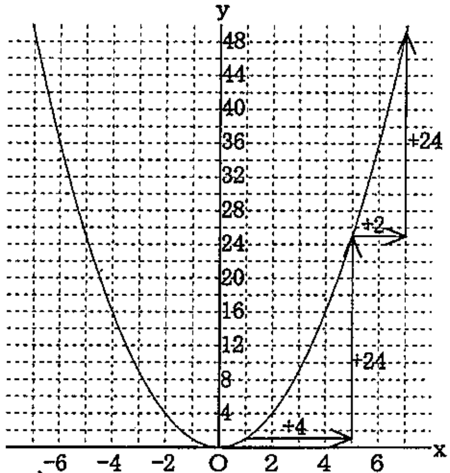
（８）Ｔ：この２つの区間の変化の割合は同じといえますか。
（Ｐ：ほとんどの生徒が違うという）

（９）Ｔ：ではこのことについて、グラフ上で調べてみましょう。
（下のグラフ $y=x^2$ を板書）
（下図のように２４の長さを図に示す。）

Ｔ：同じ２４だけれども違いがありますね。

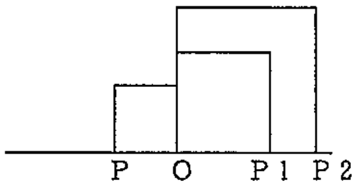
P_{22}：５～７秒後、１～５秒後・・・

Ｔ：そうですね。それによって変化の割合が違ってきますね。
（傾き方を色で示し、その違いを強調する。）



Ⅱ．研究協議

・生徒のいろいろな反応がみられおもしろかった。
・生徒は自分でいろいろ考え問題を解決していた。（特に（６））
・（４）のあっさり扱えば、（７）～（９）は５０分の授業におさまると思う。
・（１）で、右のようにＰ１、Ｐ２のような重なって状態も紹介すれば、図を使って考えようとする生徒が多くなるのではないだろうか。



・この課題は、グラフで変化の割合の意味をより明らかにするような気がする。２４の長さを示すひごのような物（＋の増加量を示せる→がついた物）を使って、増加量が＋２４になるのは何カ所もあることを強調した方がよい。
・０～$\sqrt{24}$秒後が初めの増加量24になることもおさえるとおもしろい。
・ｘの変域がﾏｲﾅｽのとき、ｙの増加量が24になる区間があるかどうかを聞いてもおもしろいのではないか。

（９）第３学年第６時の研究授業（第２回）

Ⅰ．授業記録

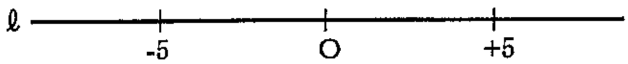
◎対象：江戸川区立松江第二中学校３年４組　男子２２名 女子１７名 計３９名
◎授業実施：平成１６年１月２７日　第５校時
◎授業者：江戸川区立松江第二中学校　　関　富美雄　教諭

Ｔ：(課題場面がかかれているプリント配布)

課題場面

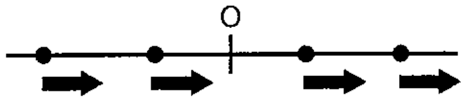
数直線ℓ上を毎秒１cmの速さで正の方向に動く点Ｐがある。原点Ｏを基準として、ｘ秒後のＯＰの長さを一辺とする正方形を考える。

ｘ秒後のＯＰを一辺とする正方形の面積をｙcm²とする。



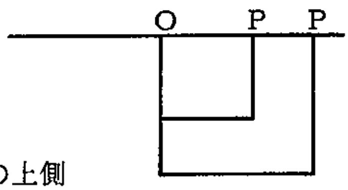
Ｔ：(課題を読む)

(1) Ｔ：Ｐはℓ上を動きます。ＯＰを１辺とする正方形をかいてみよう。
(マグネットを使って説明)



Ｐ：(図に正方形をかき入れる)
Ｔ：(机間指導)
Ｔ：何をしていいのかとまどっているのかな。
Ｔ：では、黒板に１つかいてもらえますか。正確な長さがないので大体でいいですよ。

(2) P_1：はい。(黒板に右図をかく)



Ｔ：では他にこのようにかいた人はいませんか。
P_2：(小さい正方形を加える)
Ｔ：二人の人にかいてもらいました。
では、このようにＰを原点より右側で、正方形を　の上側にかいた人は手をあげてください。(11名挙手)
正方形を　の下側にかいた人は手をあげてください。(３名挙手)
Ｔ：点Ｐを原点の左側にとった人は手をあげてください。(２名挙手)
Ｔ：どれがいいでしょうか。どう思いますか。
Ｐ：(反応なし)

(3) Ｔ：ＯＰを１辺とする正方形をとりなさいといっただけだから、どれでもいいのですね。
Ｔ：では次に、こういう変化をしていく正方形の面積を考えてもらいます。
毎秒１cmの速さで、正の方向に動いていくとき、ｘ秒後の正方形の面積をｙcm²として、表に表してみよう。
Ｐ：(表をつくり、うめる)
Ｔ：(板書)：ｘ秒後の正方形の面積をｙcm² とする。
では、黒板にかいてみてください。P_3さんお願いします。

P_3：

ｘ(秒)	－５	－４	－３	－２	－１	０	１	２	３	４	５
ｙ(cm²)	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

T：まわってみたところ、多くの人がP_3さんのようにはかいていませんでした。
他の人は、こういうものでしたね。

（板書）：

x	0
y	

T：０からスタートしてかいた人は手をあげてください。（３名挙手）

（板書）：

x	1
y	

T：１からスタートしてかいた人は手をあげてください。（８名挙手）

T：マイナスまで考えた人はいませんか。（２名挙手）
T：ｘの値が－５というのはどういう意味なんでしょう。
P：（反応なし）
T：時間的には、ｘ＝－５は５秒前ということですね。
T：では、表を確認してみましょう。
１秒間に１cm進むから、１秒後の面積は１×１＝１cm^2
２秒後の面積は２×２＝４cm^2 ですね。

(4) T：今かいた表をよくみて、気がつくことをあげてみましょう。
P_4：式に表すと$y=x^2$ になる。
T：このことに気がついた人は手をあげてください。（１３名挙手）
他に気がついたことはありませんか。
P_5：ｘの値がマイナスでもｙの値はプラスです。

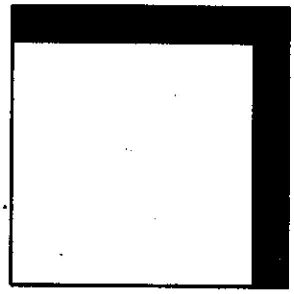
(5) T：ではｘの増加量が１のとき、ｙの増加量が１５になるのは何秒から何秒のときですか。
P：（考える）
P_6：７秒後から８秒後です。
T：答えがこうなった人は手を挙げてください。（１２名挙手）
T：ではどのように求めましたか。
P_7：１秒後から２秒後までの１秒間では、ｙの値は３増えます。次の１秒間ではｙの値は５増えます。このようにして、ｙの値が１５増えるのは７秒後から８秒後です。

+1 +1 +1 +1 +1 … +1

x（秒）	0	1	2	3	4	5	・・・・	7	8
y（cm^2）	0	1	4	9	16	25	・・・・	49	64

+1 +3 +5 +7 +9 … +15

T：他の求め方をした人はいませんか。
P：（反応なし）
T：計算で求めた人はいませんか。
P：（反応なし）
T：あるときから１秒間にｙの増加量が１５になるのは、図のどこに表れてきますか。
T：この部分ですね。この部分がｙの増加量ですね。
T：この部分が１５になるのを計算で求める方法はないでしょうか。



+1

P₈：

x	x	$x+1$
y	x^2	$(x+1)^2$

+15

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2-x^2&=15\\
x^2+2x+1-x^2&=15\\
2x+1&=15\\
2x&=14\\
x&=7
\end{aligned}
$$

(6) Ｔ：では、ｙの増加量が２４になるのは何秒後から何秒後ですか。

（板書）：$\boxed{\text{ｙの増加量が２４になるのは何秒後から何秒後か。}}$

Ｔ：今度はｘの増加量が１とは限りませんよ。区間をいろいろ考えてみてください。

Ｔ：P₉さん、答えてみてください。

P₉：５秒後から７秒後です。

Ｔ：確かにいいようですね。　（板書）

+1

x	5	7
y	25	49

+15

Ｔ：他に求めた人はいませんか。
P₁₀さん。

P₁₀：１２秒後から$2\sqrt{42}$秒後です。

Ｔ：どうやって求めたか説明してください。

P₁₀：１２秒のときのｙの値
１４４に２４をたして
１６８、その平方根を
求めました。

（板書）

x	12	○
y	144	168

+24

Ｔ：他の区間から求めた人はいませんか。

Ｐ：（反応なし）

Ｔ：ｙの増加量が２４になるのは一体いくつあるのですか。

Ｐ：（反応なし）

Ｔ：今は３つの区間しかでなかったですが、実際は無数にありそうですね。

(7) Ｔ：では１秒後から５秒後までの変化の割合と、５秒後から７秒後までの変化の割合を求めましょう。

Ｔ：変化の割合は前の時間に定義しましたね。

（板書）

$$\boxed{\text{変化の割合}=\frac{\text{ｙの増加量}}{\text{ｘの増加量}}}$$

（チャイム）

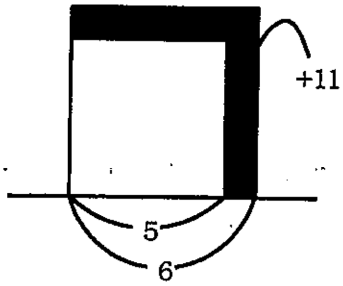
Ｔ：５秒後から７秒後　$\dfrac{49-25}{7-5}=\dfrac{24}{2}=12$

Ｔ：１秒後から５秒後　$\dfrac{25-1}{5-1}=\dfrac{24}{4}=12$

Ｔ：区間によって変化の割合は違います。これが１次関数の変化の割合と明らかに違うところですね。
次回、もう少し確認しましょう。

Ⅱ．研究協議

・(1)の発問では、課題場面を単に示しただけだったので、生徒はその状況を把握しづらかったようである。点Ｐの動きを意識させるように、負から正の方向へマグネットを動かした方が良かった。
・(1)の発問では、始め点Ｐを黒板に具体的にとり、正方形をかき込む作業を１つは示しておいた方が良かった。
・ｘ，ｙの関係を示す表から、ｘの増加量、ｙの増加量、変化の割合など気づくことを発表させる場面では、生徒からでた意見を表で具体的に確認したほうが良かった。
・また、ｙの増加量については、重なった正方形の図のＬ字部分で確認した方が良かった。その活動を通して、多様な見方でｙの増加量や変化の割合をとらえることができると思う。



+1

x	・・・	4	5	6
y	・・・	16	25	36

+11

・(5)の課題では、表を１０まで書いていた生徒は、すぐに見つけられた。
・(7)の設問では、変化の割合の意味を忘れている生徒が多かったので、

変化の割合＝$\dfrac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}}$ の定義を板書したときに、具体的に確認すれば良かった。

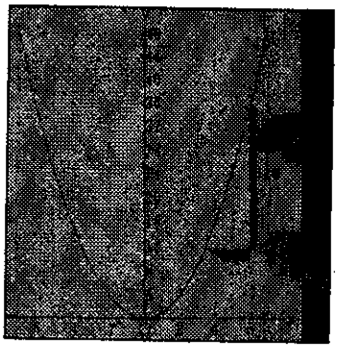
・変化の割合を求める式 $\dfrac{5^2-1^2}{5-1}$ に頼るより、表を利用して、

+4

x	1	5
y	1	25

+24

も示し、そこで、変化の割合＝$\dfrac{24}{4}$＝６のように求めていった方が良かった。



・(8)の活動では、アとイの順番を逆にした方が良かった。
・(9)の課題で、ｙの増加量が読みとれない生徒に対しては写真のようなＬ字型教具を使い、視覚的に把握させた方が良かった。
・全体的に指導案の前半(1)～(3)までの活動に、時間をかけすぎた。(5)や(6)の課題に時間をかけたい。
・表で考える生徒、式で考える生徒、図で考える生徒がいる。それぞれの考えたことを大切にしながら、関連づけをしていく指導が大切である。
・課題場面の最初の発問では、いろいろな正方形がかきたくなるような、また、点Ｐの位置と正方形の大きさを想像していけるような教師の投げかけを工夫することができれば、後の展開(5)や(6)の生徒の反応が違ってくる。

（10）第３学年第６時の研究授業（第３回）

Ⅰ．授業記録

◎対象：荒川区立第九中学校３年２組　男子１７名 女子１６名 計３３名

（習熟度別授業を解除して１クラスで実施）

◎授業実施：平成１６年２月９日　第５校時

◎授業者：荒川区立第九中学校　　高村　真彦　教諭

（生徒の反応等は、略）

Ⅱ．研究協議

・(1)で、正方形をかくときに、戸惑った生徒が多く、時間がかかった。この場合、導入なので教師がそのことをすぐ把握し、例示した方がよかった。

・点Ｐが負の領域の位置にあることが想像しづらかった。この場合、教師はその位置に点Ｐを示し、線分ＯＰを色で協調し、具体的にこれを一辺とする正方形の一辺の存在を意識させることが必要である。

・表を作らせるところでは、「時間を考えているのだから負の数は考えない」という生徒がいた。

・授業時間の多くを(1)に掛け過ぎてしまい、後半は教師の主導で行った感がある。

・(6)の課題について、どの生徒もその課題解決に向けて意欲的に取り組んでいた。しかし、変化の割合とｙの増加量２４との関係についての理解を深めるまでの時間がなかったので、そこまでには至らなかった。

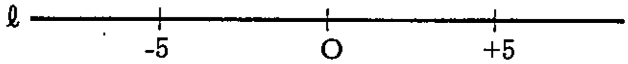
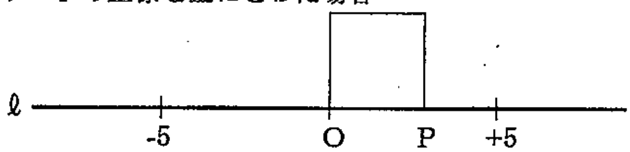
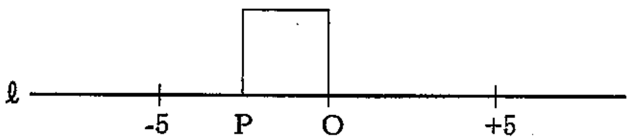
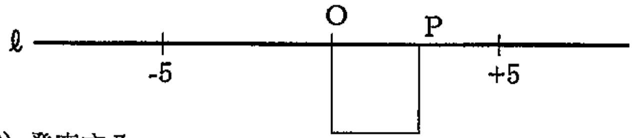
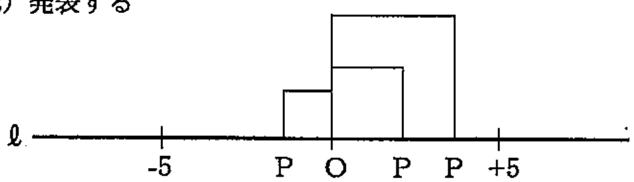
(11) 第3学年第6時 改訂指導案

※ 全体の流れは変わっておらず、指導上の留意点のみ改訂した。たものである。
　　[　　] 内は、p.6～7の指導案に付け加えた部分である。

本時のねらい

・「変化の割合」を求めるときに、区間を意識させる。

・$y=ax^2$において、yの増加量が同じでもxの増加量、さらに変化の割合も異なることを理解させる。

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
課題を把握する	課題場面 数直線ℓ上を毎秒1cmの速さで正の方向に動く点Pがある。原点Oを基準として、x秒後のOPの長さを一辺とする正方形を考える。 x秒後のOPを一辺とする正方形の面積をy cm²とする。 	・ワークシートを配る。
	(1) OPを一辺とする正方形をかき入れてみよう。 ア　Pの座標を正にとった場合 	Pの位置だけでなく、線分OPを意識させる。
	イ　Pの座標を負にとった場合 	イのような反応が出ない場合は教師が例示してもよい。
	ウ　Pの座標を負にとり、正方形を下にかいた場合 	・このように考えた生徒にも、面積は同じになることを確認する。
xとyとの関係を表で考える	(2) 発表する 	・板書のℓ上に、Pや正方形を書きこむ。 (5)エで意味を持たせるために、

この内容の板書は残しておく

(3) ｘとｙの関係を表に表してみよう。

ア

x	0	1	2	3	4	・・・
y	0	1	4	9	16	・・・

イ

x	1	2	3	4	・・・
y	1	4	9	16	・・・

ウ

x	・・・	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	・・・
y	・・・	9	4	1	0	1	4	9	16	・・・

・$y=x^2$の式も考える生徒を取り上げる。このとき、式も全体で確認する。

(4) 表から、ｘの増加量やｙの増加量、変化の割合などについて、気づくことをあげてみよう。

ア　ｙはｘを２乗した数になっている。

イ　ｘが２倍，３倍・・・になると、ｙは４倍，９倍・・・になっている。

ウ　変化の割合は一定ではない。

エ　ｘの値が＋でも－でも、ｙの値は同じになる。

オ　ｘが正の数でも負の数でも、ｙは正の数。

(5)，(6)をじっくり考えさせるために、ここではあまり深入りしない。

ｘ，ｙの増加量が決まっているときのｘの区間を考える

(5) ｘの増加量が１のとき、ｙの増加量が１５になるのは、何秒後から何秒後ですか。

ア　表をかいて求める。

		+1	+1	+1			+1	
x	0	1	2	3	・・・・・・・・	7		8
y	0	1	4	9	・・・・・・・・	49		64
		+1	+3	+5			+15	

イ　方程式を作り、求める。

$$(x+1)^2-x^2=15$$
$$x^2+2x+1-x^2=15$$
$$2x+1=15$$
$$x=7$$

7秒後から８秒後

ウ　方程式を作り、求める。

$$x^2-(x-1)^2=15$$
$$x^2-x^2+2x-1=15$$
$$2x-1=15$$
$$x=8$$

7秒後から８秒後

じっくり考えさせる。

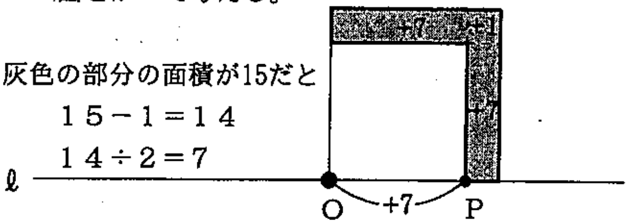
・何をしたらよいか分からない生徒には、表をかくよう机間支援をする。

エ　図をかいて考える。

灰色の部分の面積が15だと

15－1＝14

14÷2＝7



7秒後から8秒後

残しておいた数直線に正方形をかきいれる。

yの増加量だけが決まっているときのxの区間を考える

(6)　yの増加量が24になるのは、何秒後から何秒後ですか。

じっくり考えさせる。

ア　表をかいて求める。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

+1　+1　+1　+1

+1　+3　+5　+7　+9　+11　+13　+15　+17

+24　+24

1秒後から5秒後，5秒後から7秒後

イ　方程式を作り、求める。

$(t+1)^2-t^2=24$

$t=11.5$　　11.5秒後から12.5秒後

答えを一つしか求めない生徒には、机間支援の中で「答えはそれだけ？」などと示唆を与える。

ウ　方程式を作り、求める。

$(x+a)^2-x^2=24$

$x^2+2ax^2+a^2-x^2=24$

$a^2+2ax=24$

$a(a+2x)=24$

$a=1$のとき、$x=11.5$　　11.5秒後から12.5秒後

$a=2$のとき、$x=5$　　5秒後から7秒後

$a=3$のとき、$x=2.5$　　2.5秒後から5.5秒後

$a=4$のとき、$x=1$　　1秒後から5秒後

エ　方程式を作り、求める。

$t^2=y^2+24$

$t^2-y^2=24$

$(t-y)(t+y)=24$

4×6　→　$(5-1)(5+1)=24$

2×12　→　$(7-5)(7+5)=24$

1秒後から5秒後，5秒後から7秒後

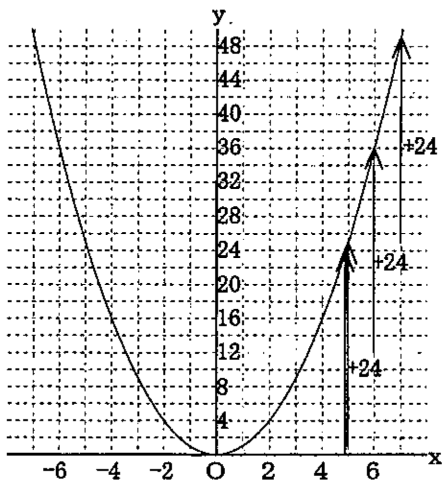
	オ　まずは、１秒後から５秒後までのときは２４増加することを暗算で求めて、下の図のように１秒ごとにずらして、ｙの増加量が２４になるところを探す。	

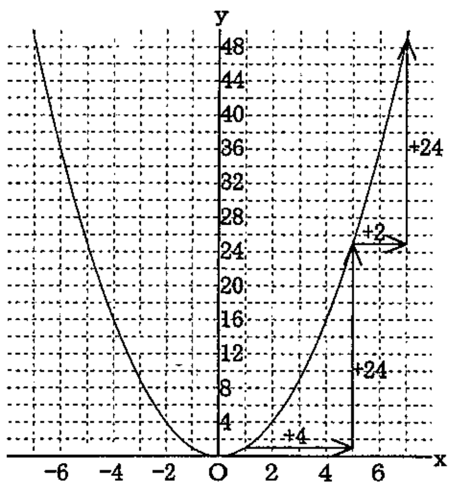
x	0	1	$\overset{2\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$	5
y	0	1	24	25

+24

+24

区間に対応した変化の割合を求める	(7)　１秒後から５秒後まで、５秒後から７秒後までの変化の割合をそれぞれ求めなさい。 （１秒後から５秒後まで） $\dfrac{5^2-1^2}{5-1}=\dfrac{24}{4}=6$ （５秒後から７秒後まで） $\dfrac{7^2-5^2}{7-5}=\dfrac{24}{2}=12$	ｙの増加量が同じでも、ｘの増加量や変化の割合が異なることにふれる。
区間によって変化の割合が異なることを確認する	(8)　(7)で求めた変化の割合の意味を確認しよう。 ア　区間によって、変化の割合は違う。 イ　ｙの増加量は同じだが、変化の割合は違う。	
変化の割合の意味をグラフで確認する	(9)　（ｙ＝ｘ²のグラフを提示し）これまで求めてきた変化の割合の意味を、グラフで確認しよう。	





３．今後の課題

本委員会は、一人ひとりの生徒の関数概念の理解が、どのように高まり深まるかを、授業実践を通して考察してきた。具体的には、授業の中で、さまざまな学習内容をどのように指導すれば、生徒の関数概念が高まるかについて、実証的に検討している。

今後、次の点について研究を進めていこうと考えている。

（1）３年間を見通した関数カリキュラムを検討し、指導計画を作成したが、その指導計画や指導案を、授業研究を通して実証的に検討する。また、小学校や高等学校との関連を見直す。

（2）「変化の割合」の各学年の適切な指導について検討を続け、指導のあり方、適切な課題を検討していく。

（3）評価問題を実施、考察し、指導計画、指導案、評価規準について見直していく。

（4）各学年において、「数学的な見方や考え方」「関心・意欲・態度」を一層伸ばすような課題を設定した授業を行い、指導のあり方や適切な課題について検討していく。

（5）関数の領域以外や他教科において、関数的な考え方を伸ばすのにふさわしい指導場面について検討していく。そして、それらとの関連を明らかにし、より適切な関数指導を追求する。

以下の文献は、東京都中学校数学研究会　関数委員会の作成したものである。

「中学校関数カリキュラムについて」
〈日数教（群馬）大会発表資料〉1997(H 9)

「中学校関数カリキュラムについて」
〈日数教（山口）大会発表資料〉1998(H10)

「中学校関数指導について」
〈日数教（秋田）大会発表資料〉1999(H11)

「中学校関数指導について」
〈日数教（千葉）大会発表資料〉2000(H12)

「１次関数における『変化の割合』の指導について」
〈日数教（埼玉）大会発表資料〉2001(H13)

「１次関数における『変化の割合』の指導について」
〈日数教（兵庫）大会発表資料〉2002(H14)

「『変化の割合』の指導について」
〈日数教（愛知）大会発表資料〉2003(H15)

東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

荒井　幸恵（足立区立蒲原中）	井出　宇郎（大田区立大森第六中）
岩木敬二郎（元板橋区立中台中）	遠藤　國雄（元板橋区立向原中）
風間喜美江（江東区立深川第四中）	小林　　博（葛飾区立双葉中）
近藤　和夫（稲城市教育委員会）	斎藤　圭祐（目黒区立東山中）
茂田　千穂（葛飾区立本田中）	鈴木　大輔（港区立六本木中）
須藤　哲夫（元品川区立伊藤中）	関　富美雄（江戸川区立松江第二中）
高村　真彦（荒川区立第九中）	塚本　桂子（大田区立東調布中）
橋爪　昭男（神津島村立神津中）	半田　　進（元弘前大学教育学部）
村田　弘恵（足立区立伊興中）	山本　恵悟（足立区立蒲原中）
吉田　直樹（中野区立第七中・山梨大学大学院）	吉田　裕行（町田市立成瀬台中）