

# 「変化の割合」の指導について

その1 ～第1学年の素地的な指導～

その2 ～割合の概念と第1学年指導計画～

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

	ページ
1. 研究の経過とねらい .....	2
2. 研究の内容	
(1) 第1学年における「変化の割合」の概念育成のためのレディネス	
① 「変化の割合」に関する生徒の実態 .....	2～ 4
1) 1次関数に関する実態調査より	
2) 小学校の割合に関する実態調査より	
3) 経済協力開発機構OECDによる 生徒の学習到達度調査PISAの結果より	
② 「変化の割合」の概念を育成することに 焦点をあてた第1学年の指導計画について .....	5～ 6
③ 「変化の割合」の概念を育成するための 第1学年指導計画の提案 .....	7
(2) 第1学年指導計画 .....	8～11
(3) 比例定数の意味を考えさせる指導案（指導計画第6時）	
① 指導案 .....	12～13
1) 第1学年第6時指導案	
2) 改訂指導案作成の方針	
② 改訂指導案と授業の実際 .....	14～19
1) 第1学年第6時改訂指導案	
2) 改訂指導案の授業記録	
3) 研究協議	
③ 新改訂指導案について .....	19
3. 今後の課題 .....	20

## 1. 研究の経過とねらい

本委員会では、平成12年度まで、中学校関数指導について具体的・実践的な指導計画や指導案を作成し、授業を通して実証的に検討を行ってきた。また、各学年における評価の観点と評価問題の作成、実施、検討も行った。それらの研究の経過を経て関数カリキュラムを検討していく中で、評価問題の実施結果から「変化の割合」の理解が弱いことが明らかになった。そこで、平成13年度より「変化の割合」の意味の理解や、その概念の育成をねらいとして、研究授業を通して指導内容・指導計画等の研究を進めている。

第2学年における「変化の割合」の指導では、その概念や意味を理解させることをねらいとした。1次関数の定義の指導後、「変化の割合」の定義を形式的に与えるのではなく、具体的な事象の考察を通して、「変化の割合」の概念や意味を理解させる指導を丁寧に行った。

第3学年において、「変化の割合」の概念や意味の理解をさらに深めさせる指導を考えた。「変化の割合」を求めるときに、そのよさや必要性がわかる、より適切で具体的な事象の課題を扱うことにした。さらに、具体的な事象を通して変化のようすを調べ、さまざまな区間の「変化の割合」を求めるといった指導の工夫を行った。

今年度は、次の2点に焦点をあて、発表を行う。

- ・ 比例定数の意味を考えさせる指導
- ・ 「変化の割合」の概念を育成することに焦点を当てた第1学年の指導計画

## 2. 研究内容

(1) 第1学年における「変化の割合」の概念育成のためのレディネス

### ① 「変化の割合」に関する生徒の実態

第2, 3学年の指導を考えていく中で、「変化の割合」の概念の獲得には難しいものがあると感じる。変化をとらえることも大変な苦勞があり、割合の概念も小学校以来生徒は困難性を感じている。例えば、以下の調査問題や国際調査PISAの結果からもそれがうかがえる。

1) 1次関数に関する実態調査より

(調査対象) 都内公立A中学校 第3学年生徒65名

(調査年月日) 平成16年11月16日(3年の関数の指導前)

調査問題<sup>(2)</sup>

yはxの1次関数で、次のような値をとっている。空欄にあてはまる数を答えなさい。

x	1	2	...	4	...	7
y	-1	1	...	ア	...	イ

(調査結果) ア・・・5 (正答)	63%	イ・・・11 (正答)	62%
3 (誤答)	18%	6 (誤答)	14%
2 (誤答)	11%	5 (誤答)	4%
その他の誤答	5%	その他の誤答	15%
無答	3%	無答	5%

対応するx, yの増加量を考えずに、yの値の規則性のみにとらわれた回答と考えられるものが多い。ここには、変化や対応という見方がいかされていないし、割合の概念までには至っていないと考えられる。

2) 小学校の割合に関する実態調査より

(調査対象) 都内公立B中学校 第1学年生徒157名

(調査年月日) 平成17年4月11日(中学校入学後)

調査問題1

5分間に180枚の速さで印刷する印刷機があります。

1時間印刷すると何枚印刷できますか。

(調査結果) 2160枚 (正答)	53%	
10800枚 (誤答)	15%	180×60と考えた
36枚 (誤答)	8%	180÷5と考えた
900枚 (誤答)	3%	180×5と考えた
その他の誤答	20%	
無答	1%	

## 調査問題2

1.5mで570円の布があります。  
この布を3.5m買うと、代金は何円ででしょうか。

(調査結果)	1330円 (正答)	29%	
	1995円 (誤答)	19%	$570 \times 3.5 = 1995$ と考えた
	1425円 (誤答)	6%	$570 \times 2 = 1140$ $1140 + 570 \times 0.5 = 1425$ と考えた
	1710円 (誤答)	5%	$570 \times 3 = 1710$ と考えた
	1140円 (誤答)	4%	$570 \times 2 = 1140$ と考えた
	その他の誤答	24%	
	無答	13%	

1あたり量が意識されていないもの、もとにする量と比べる量を取り違えたもの、単純にかけ算をするものなど、割合の考えが十分に理解されていないと考えられる。

また、小数倍の概念が十分に理解されていないとも考えられる。

### 3) 経済協力開発機構OECDによる生徒の学習到達度調査PISAの結果より

(調査対象) 高校1年生 約4700名<sup>(3)</sup>

#### 設問1

春夫さんの歩数は1分後に70歩です。この公式を春夫さんの歩行にあてはめると、春夫さんの歩幅はどれくらいですか。どのように考えたかも示してください。

#### 設問2

博さんの自分の歩幅が0.80mであることを知っています。公式を博さんの歩行にあてはめます。博さんの歩く速度は1分あたり何mか、1時間あたり何kmかも求めてください。どのように考えたかも示してください。

『「変化と関係」領域からの出題で、2000年と2003年に出题している。設問1はOECD平均では2%向上しているが、特に日本の場合、2000年(H12)46.1%→2003年(H15)40.9%と5.2%低下している。設問2は、OECD平均では1.7%向上しているが、日本は37.2%→33.9%と3.3%低下している。』<sup>(3)</sup>

また、小学校の学習指導要領において、以前は扱っていた「比の値」「縮図や拡大図」などの割合に関する学習内容は扱わなくなった。

上記の調査結果に加え、このことは「変化の割合」の概念や意味の理解に深刻な問題をもたらしていると推察される。

## ②「変化の割合」の概念を育成することに焦点をあてた

### 第1学年の指導計画について

現在の学習指導要領では「変化の割合」の指導は、第2学年から行われている。本委員会のこれまでの研究<sup>(1)</sup>から「変化の割合」の概念を育成し、理解を深めるためには、第1学年においてもその概念を育てていくための指導の必要性を感じた。実際に第6時の授業研究を通して、第1学年における「変化の割合」の概念育成のためのレディネスは次の3つであると考えられる。

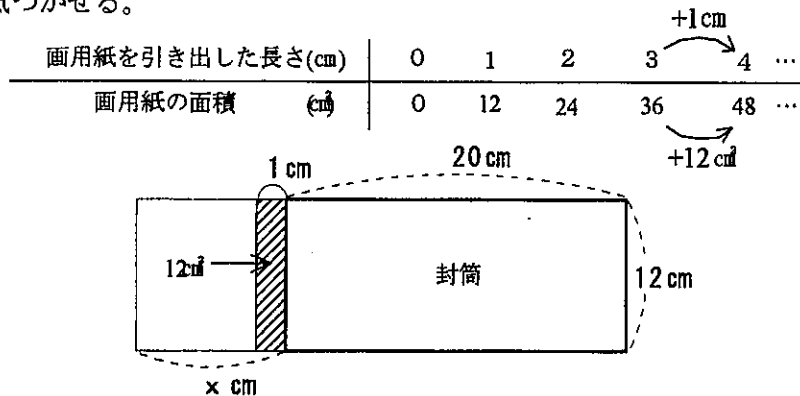
- ・割合の概念。特に、単位量あたりの大きさの考え方（「1あたり量」とよぶ）
- ・変化や対応の見方
- ・増加量の見方

このレディネスを育てるために、第1学年指導計画の第6時「比例定数の意味を考える」の授業を設定した。また、第6時の授業だけでなく、第1学年の指導計画全体を通して、さまざまな場面で指導を行っていく必要があると考えている。P8～11の第1学年指導計画には「変化の割合」の概念育成のためのレディネスを示した。その指導の概要を以下に示す。

#### 1) 具体的な事象を通して、変化や対応の見方を指導するとき、

##### 1あたり量を具体的な数量の意味として意識させる。

例：第1時の封筒の課題では、封筒から引き出した画用紙の長さ、封筒から出ている画用紙の面積との関係を調べる。画用紙を1cmずつ引き出していくとき、面積が $12\text{cm}^2$ ずつ増えていくが、下の図では斜線部であることを生徒に気づかせる。



#### 2) $y = ax$ の「 $a$ 」の意味が、1あたり量と同じ値であることに気づかせる。

例：第4時の水そうの課題では、円柱形の水そうに毎分 $2\text{cm}$ ずつ水面の高さが増すように水を入れていく。 $x$ 分後の水面の高さを $y\text{cm}$ とするとき、 $y = 2x$ と表される。この式の比例定数「2」は毎分 $2\text{cm}$ の「2」と同じ値であり、1分あたりに $2\text{cm}$ 増加することに気づかせる。

#### 3) $x$ の増加量や $y$ の増加量を考えさせるとき、1あたり量の意味から考えさせる。

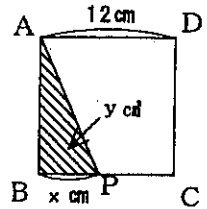
例：第6時の紙の厚さと枚数の課題では、厚さが $8\text{mm}$ 増えるときの紙の枚数を考えさせる。このとき、1あたり量から考えることに気づかせる。

#### 4) 3)を盛り込んだ関数の利用の授業を行う。

例：第6時の指導の後、関数の利用（第13時）で比例定数の意味を考えさせることを通して問題を解決させる授業を行う。

第13時の授業の展開例を示す。

[課題] 右の図のような正方形ABCDがある。点PはBを出発して辺BC上をCまで動く。BPの長さがx cmのときの△ABPの面積をy cm<sup>2</sup> とするとき、xとyの間にはどんな関係があるか調べてみよう。



●課題を提示する。

●xとyの間にはどのような関係があるかを調べさせる。その理由も考えさせる。

(生徒の反応) ア.  $y = 6x$  という式で表させるから、比例である。

イ. 表より、xの値が2倍、3倍、…になると、yの値も2倍、3倍、…になるから比例である。

x	0	1	2	3	4	5	...
y	0	6	12	18	24	30	...

● $y = 6x$  の比例定数6の意味を考える。

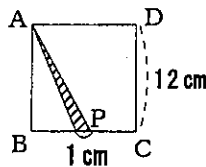
(生徒の反応) ア. (表より) (yの値) / (xの値)

イ. (表より)  $x = 1$  のときのyの値

ウ. (表より)  $6 \text{ cm}^2$  ずつ増えるの6

エ. 点Pが1 cm動くときの増える面積

(教師の発問) ウやエの生徒には、「図ではどこが増えたの?」



●点Pが4 cm動いたときの増える面積について考える。

(生徒の反応) ア. 1 cm動くと  $6 \text{ cm}^2$  面積が増えるから、

$$6 \times 4 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

イ. (表より、 $x = 4$  のyの値を見て)

$$24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

ウ. (表より、 $x = 1$ 、 $x = 5$  のそれぞれのyの値を見て)

$$30 - 6 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

エ.  $y = 6x$  に  $x = 4$  を代入して

$$y = 6 \times 4 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(教師の発問1) イについて、「どこから  $24 \text{ cm}^2$  増えましたか?」

「0から4以外に、xが4増えるところがありますか。」

「また、そのときの面積は何  $\text{cm}^2$  増えていますか。」

(教師の発問2) イ、ウについて「1 cmあたりの増える面積はいくつですか。」

「1 cmあたり  $6 \text{ cm}^2$  増えているのは図ではどの部分ですか。」

5) いろいろな具体的な事象を扱う。

例：封筒の課題、水槽の課題（水を入れる課題、水を抜いていく課題）、

紙の厚さと枚数の関係を調べる課題、三角形の面積を考える動点の問題

### ③「変化の割合」の概念を育成するための第1学年指導計画の提案

第2学年の関数の「変化の割合」の意味、つまり  $y = ax + b$  の「a」の意味が理解されていないことが多い。本委員会では、この実態を受けて、これまで第2学年の指導の改善を行ってきた。この改善によって、「a」の意味の理解はなされてはきた<sup>(1)</sup>が、中学校3年間の関数指導を考えると、この意味は深く、また第3学年や高校へのつながりも大きい。したがって、第1学年からこのことを意識しての指導を考えることが必要である。それぞれの学年の関数の「変化の割合」またはその概念についての指導は、次のような流れを考えている。

小学校 (割合) = (比べる量) ÷ (もとにする量)

中学校第1学年 比例の関係において  $\frac{y \text{の値}}{x \text{の値}} = a$  \*

\*\* 比例の関係において

$$\frac{(y \text{の値}) - 0}{(x \text{の値}) - 0} = a \rightarrow \frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}} = a$$

第2学年 1次関数  $y = ax + b$  において  $\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}} = a$

第3学年 関数  $y = ax^2$  において  $\frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}}$

\*については、中学校第1学年の教科書では、その意味について多少ふれてはいるが、指導においては積極的に行われてこなかった。特に、 $(y \text{の値}) \div (x \text{の値})$  が小学校で学習した割合と結びつけて学習されてこなかった。そこで、具体的な事象を通して、比例定数の意味が、 $(y \text{の値}) \div (x \text{の値})$  が単位量あたりの大きさを表していること、さらに  $x$  の増加量1あたりの  $y$  の増加量になっていることを指導していく。

\*\*については、比例のグラフ上で、 $x$  が1増えたら  $y$  が2増えているなどのことを確認させる程度の指導は多少みられるものの、中学校第1学年で具体的な指導を見ることはほとんどない。具体的な場面で何もやらずに、グラフの形の中でそれを調べることは、生徒にとっては唐突で形式的な指導になっていた。

本委員会では、具体的な場面を通して上記の\*\*の学習内容を導入し、「\*→\*\*」の指導を指導計画に位置づけ、指導することを提案したい。それによって、例えば、中学校第2学年の1次関数の導入で見かける「 $y = (x \text{に比例する量}) + (\text{一定の量})$ 」について考えるとき、(比例する量)は(単位量あたりの大きさ) ×  $x$  になっていることが容易に理解できる。

$$y = (\text{単位量あたりの大きさ}) \times x + (\text{一定の量})$$

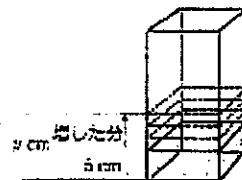
||

$$y = (\text{変化の割合}) \times x + (\text{一定の量})$$


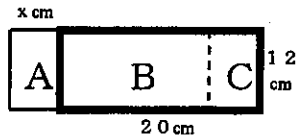
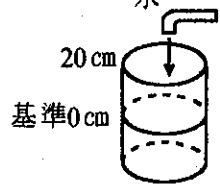
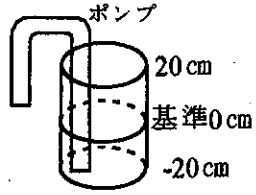

$x$  : 比例する量

$$y = ax + b$$

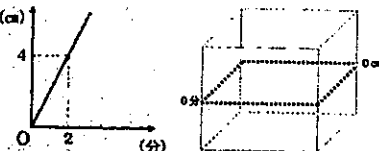
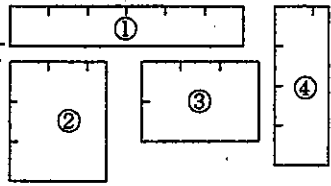
一定の量



(2) 第1学年 指導計画

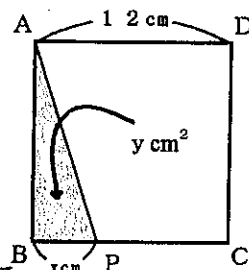
時数	項目	学習内容	育成するレディネス
1	ともなうて変わる量	<p>〔課題〕 封筒から画用紙を引き出してゆくと何が変わりますか。</p>  <p>① 変化する量・変化しない量をあげる。</p> <p>(i) 引き出した長さ<math>x</math>と周囲の長さとの関係を調べる。  <math>y = 2x + 64</math></p> <p>(ii) 引き出した長さ<math>x</math>とAの部分の面積との関係を調べる。  <math>y = 12x</math></p> 	1あたり量 変化や 対応の 見方 増加量 の見方
2		<p>(iii) 引き出した長さ<math>x</math>と全体の面積との関係を調べる。  <math>y = 240 + 12x</math></p> <p>(iv) 引き出した長さ<math>x</math>とBの部分の面積との関係を調べる。  <math>y = 240 - 12x</math></p> <p>③ 「<math>y</math>は<math>x</math>の関数である」ことを定義する。</p> <p>④ 「変域」を定義する。</p>	
3	さまざまな関数	<p>〔課題例〕 1枚の紙を2つに折って切り、さらに重ねて2つに折って切っていく。これを繰り返す。10回切ったとき、紙は全部で何枚になりますか。</p> <p>① いろいろな解き方を発表する。</p> <p>② 紙の枚数が、切った回数<math>x</math>の関数であることを確かめる。</p>	変化や 対応の 見方
4	関数 $y = ax$	<p>〔課題場面〕 右の図のような水そうに毎分2cmずつ水面の高さが増すように水を入れていきます。</p>  <p>① 1分後、2分後、3分後、・・・の水面の高さを調べ、表にまとめる。</p> <p>② 1分前、2分前、3分前、・・・の水面の高さを調べる。</p> <p>③ <math>x</math>分後の水面の高さを<math>y</math>cmとして、<math>y</math>を<math>x</math>の式で表す。</p> <p>④ 「<math>y</math>は<math>x</math>に比例すること」を定義する。</p>	1あたり量 変化や 対応の 見方
5		<p>〔課題場面〕 右の図のような水そうから、水面の高さが毎分2cmずつ減るように水をぬいていきます。</p>  <p>① 第4時と同じように、表をかいて調べる。</p> <p>② <math>y</math>は<math>x</math>に比例することを確認する。</p> <p>③ 練習問題を行う。</p>	
6	比例定数の意味 (本時)	<p>〔課題場面〕 (500枚の) 紙の束を見せる。</p>  <p>〔課題1〕 500枚の紙の厚さは40mmです。紙の枚数を調べるとき、実際に数えなくても紙の厚さを調べれば紙の枚数がわかります。他のいろいろな中身の枚数と紙の厚さの関係を表をかいて調べてみよう。</p> <p>〔課題2〕 紙の厚さが8mm増えると紙の枚数は何枚増えますか。また、紙の厚さが10mm増えると紙の枚数は何枚増えますか。</p>	1あたり量 変化や 対応の 見方 増加量 の見方



7	関数 $y = ax$ の グラフ	<p>[課題場面] 水そうに、1分 (分) に <math>2\text{cm}</math> ずつの割合で水を入れていく。</p>  <p>① 具体的な場面をもとに表をかく。</p> <p>② 与えられたグラフの意味を確認する。</p> <p>③ 負へ拡張し、グラフを想像する。</p> <p>④ 点の位置を座標を用いて表現する。与えられた座標をもつ点をとる。</p> <p>⑤ 「座標軸, 原点, x軸, y軸, x座標, y座標」の用語を与える。</p> <p>⑥ グラフを完成する。</p>	1あたり量 変化や 対応の 見方 増加量 の見方
8		<p>① 前時の復習を行う。</p> <p>② <math>y = x</math>, <math>y = \frac{1}{2}x</math>, <math>y = 2x</math> のグラフをかく。</p> <p>③ <math>y = x</math>, <math>y = \frac{1}{2}x</math>, <math>y = 2x</math> のグラフの特徴を考える。</p>	
9		<p>① <math>y = -x</math>, <math>y = -\frac{1}{2}x</math>, <math>y = -2x</math> のグラフをかく。</p> <p>② <math>y = -x</math>, <math>y = -\frac{1}{2}x</math>, <math>y = -2x</math> のグラフの特徴を考える。</p> <p>③ <math>y = ax</math> のグラフの特徴を考える。</p> <p>④ 練習問題 (変域の表し方, グラフの式の決定 [グラフから, 式から])</p>	
10	反比例とその グラフ	<p>[課題] 右の4つの長方形の中で一つだけ他と違うものがあります。どれでしょうか。</p>  <p>① 面積が <math>6\text{cm}^2</math> である長方形について調べる。</p> <p>② <math>y = 6/x</math> について調べる (xの変域を負へ拡張する)</p> <p>③ <math>y = -12/x</math> について調べる。</p> <p>④ 「yはxに反比例する」ことを定義する。</p>	変化や 対応の 見方
11		<p>① <math>y = 6/x</math> のグラフをかく。</p> <p>② <math>y = -12/x</math> のグラフをかく。</p> <p>③ 双曲線を定義し、<math>y = a/x</math> のグラフの特徴をまとめる。</p>	
12		<p>[課題] A地からB地までの道のりを、行きは時速 <math>4\text{km}</math> の速さで5時間歩きました。</p> <p>① 帰りは時速 <math>x\text{km}</math> の速さで <math>y</math> 時間歩いたとすると、<math>y</math> を <math>x</math> の式で表しなさい。</p> <p>② <math>y = 20/x</math> という式から、<math>x</math> と <math>y</math> の関係は何か。比例定数 <math>20</math> は何を表すか。</p> <p>③ 帰りには、時速 <math>3\text{km}</math> の速さで歩いたとすると、掛かった時間はどれだけのですか。</p> <p>④ 1組の <math>x</math>, <math>y</math> の値から立式をする。</p> <p>⑤ 練習問題を行う。</p>	

1 3 関数の利用

【課題】 右の図のような正方形  $ABCD$  がある。点  $P$  は辺  $BC$  を出発して  $BC$  上を  $C$  まで動く。  $BP$  の長さが  $x$   $cm$  のときの  $\triangle ABP$  の面積を  $y$   $cm^2$  とするとき、  $x$  と  $y$  との間にはどんな関係があるか調べてみよう。

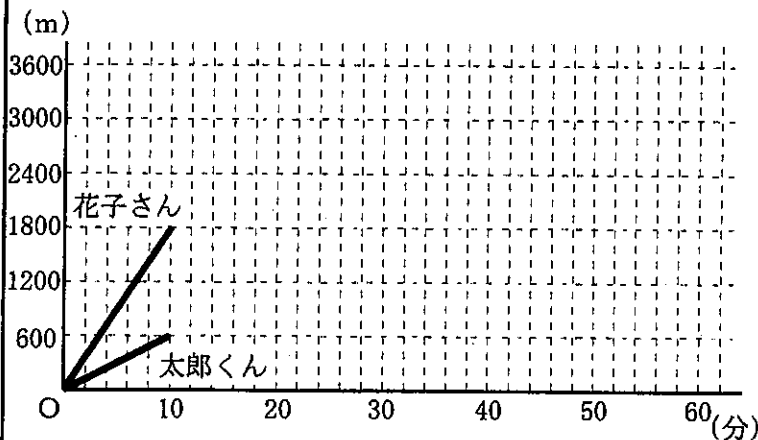


- ①  $x$  と  $y$  との関係を調べ、その理由も考える。
- ②  $y = 6x$  の比例定数 6 の意味を考える。
- ③ 点  $P$  が 4  $cm$  動いたときの増える面積について考える。
- ④  $x$ 、 $y$  の変域を求める。

1 あたり量  
変化や  
対応の  
見方  
増加量  
の見方

1 4 (グラフのよみ)

【課題場面】 花子さんと太郎君は、 $A$  駅から  $3600$   $m$  離れた  $B$  公園に行きました。花子さんは自転車で、太郎君は歩きました。下のグラフは、2 人が  $A$  駅から出発してから途中までの 2 人の動くようすを表したものです。



- ① わかることを発表する。
- ② グラフを使って問題を解決する。
  - (i) 出発してから 10 分後の地点で花子さんは本を落とした。その本を太郎君が拾うのは、出発してから何分後になるかを調べる。
  - (ii) 花子さんと太郎君との差が  $1800$   $m$  になるのは出発してから何分後になるかを調べる。
- ③ 往復運動や休憩をとった場合にグラフはどのようになるかを考え発表する。
- ④  $A$  駅から  $3600$   $m$  離れた  $B$  公園までの道のりを動くようすをグラフに表して、問題を作る。

1 5 問題練習  
自由研究

問題練習とレポートの説明

- ① 針金でできたロボットの置物があります。使われている針金の長さを、置物をくずさなで知るのにはどうしたらよいでしょうか。
- ② プールに水を入れるとき、満水になるまでずっとそばで見ている人はいません。あふれないためにはどのような工夫をしていると思いますか。

1 あたり量  
変化や  
対応の  
見方

③ 上の①や②では、求めにくいものを別の量に着目して求めようとしています。身の回りからこのような例を考えてみましょう。

④ 40Lで520km走ることのできる自動車Aと30Lで360km走ることのできる自動車Bがあります。この2台の自動車は同じ地点から出発し、同じ速さで走ります。次の問いに答えなさい。

- 1) どちらの自動車の方が燃費がいいですか。
- 2) 自動車A、Bは  $x$  Lのガソリンで  $y$  km走るとして、それぞれ  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。
- 3) 自動車A、Bはともに50Lまでガソリンが入ります。どちらもガソリンを50L入れてスタートしました。どちらが先にガソリンがなくなりますか。また、一方の自動車のガソリンがなくなったとき、もう一方の自動車はあと何km進むことができますか。

発展的課題  
関数の利用

[課題] 右の図のような  $AB = 10$  cm

$BC = 24$  cmの長方形がある。

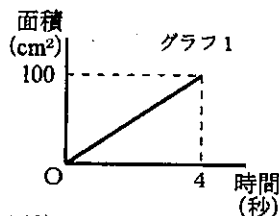
2点P、Qは辺BC上を動くものとする。ただし、点Pは毎秒3cmの速さで頂点Bを出発し、頂点Cまで動く。

このとき、点Qはどのように動きますか。

- ① 点Qがどのように動いているか、思いつくままに発表する。
- ② 点Qがどのように動いたか知るには何が分かればよいか考える。

[1] 条件1を与える。

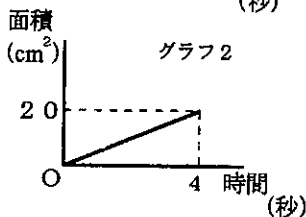
[条件1] グラフ1は点PがBを出発してから4秒までの時間と $\triangle ABQ$ の面積との関係を表したグラフである。このとき、点Qはどのように動きましたか。



- ③ 条件1から、点Qがどのように動いたかを考える。

[2] 条件2を与える。

[条件2] グラフ2は点PからBを出発してから4秒までの時間と $\triangle APQ$ の面積との関係を表したグラフである。このとき、点Qはどのように動きましたか。



- ④ 条件2から点Qがどのように動いたかを考える。

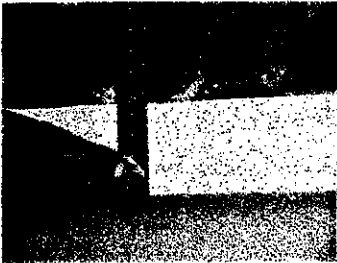
(3) 比例定数の意味を考えさせる指導案 (指導計画第6時)

① 指導案

1) 第1学年第6時指導案

本時のねらい

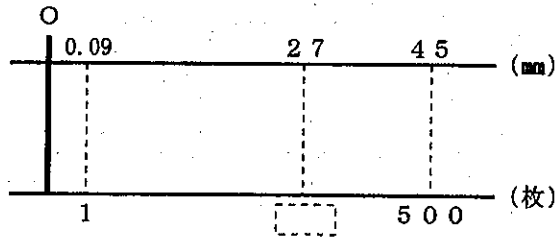
- ・ともなって変わる2つの数量から、関数関係を見出す。
- ・関数関係を表、式を使って表し、比例の意味を理解する。
- ・変化の割合を理解するための、素地的な学習の形成過程を把握する。

学 習 活 動	主 な 発 問 と 予 想 さ れ る 生 徒 の 反 応	指 導 上 の 留 意 点
<p>課題を把握する</p> <p>実物から予想を立てる</p> <p>実測する</p>	<p>課題場面</p> <p>1. 写真を提示する。</p> <p>(500枚重ねると45mmの高さになる同質の紙の写真)</p>  <p>2. 300枚の紙の束を用意し、生徒に提示する。</p> <p>(1)実際に何枚あるか、実物から予想しなさい。 ア 数える イ 高さから求める ウ 重さから求める</p> <p>(2)実際に高さを測定し、何枚あるかを調べてみましょう。 ア (みんなの前で測定して)「27mmありました。」</p> <p>(3)実際に何枚あるか考えてみましょう。 ア 1枚あたりの厚さから  <math display="block">45 \div 500 = 0.09 \text{ mm/枚}</math> <math display="block">27 \div 0.09 = \boxed{300} \text{ 枚}</math>  イ 1mmあたりの枚数から  <math display="block">500 \div 45 = 100/9 \text{ (枚/mm)}</math> <math display="block">100/9 \times 27 = \boxed{300} \text{ (枚)}</math>  ウ 45と27との関係から  <math display="block">45 \text{ mm} \rightarrow 500 \text{ 枚}</math> <math display="block">27 \text{ mm} \rightarrow \boxed{300} \text{ 枚}</math>  エ 厚さ9mm(45と27の最大公約数9)のときを利用して  <math display="block">45 \text{ mm} \rightarrow 500 \text{ 枚}</math>           ならば 5で割って  <math display="block">9 \text{ mm} \rightarrow 100 \text{ 枚}</math>           厚さが27mmのときは3倍すればよいから  <math display="block">27 \text{ mm} \rightarrow \boxed{300} \text{ 枚}</math>  オ もとの量に比の値をかけて  <math display="block">500 \times \frac{27}{45} = \boxed{300} \text{ (枚)}</math> </p>	<p>・写真からよみとれるものを、生徒に考えさせる。</p> <p>・300枚の用紙を用意する。(高さは27mm)</p> <p>・内容を板書し、整理する。</p> <p>・500枚…45mm 枚…27mm</p> <div style="border: 1px solid black; width: 30px; height: 20px; margin-left: 100px;"></div>

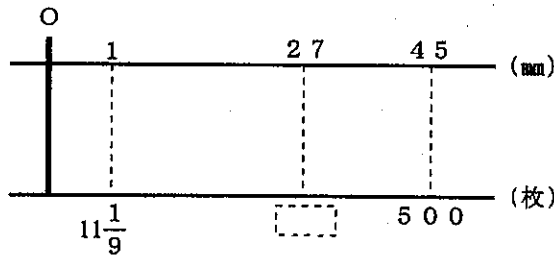
考え方を表現する

(4) (3)の考えを数直線を使って整理しよう。

ア (3)のアの場合



イ (3)のイの場合



関係を意識する

(5) 紙の厚み(高さ)と枚数の関係を考えてみよう。

ア 比例している

イ 高さが2倍になると、枚数が2倍になる

表に表す

(6) 紙の厚み(高さ)  $x$  mmと紙の枚数  $y$  枚の関係を表にしてみよう。

ア

紙の厚み	$x$ mm	0	27	45
紙の枚数	$y$ 枚	0	300	500

イ

紙の厚み	$x$ mm	1	2	3
紙の枚数	$y$ 枚			

式に表す

(7)  $y$  を  $x$  の式で表そう。

$$y = \frac{100}{9}x$$

(8)  $\frac{100}{9}$  の意味について考えよう。

ア 1 mmあたりの紙の枚数

イ 高さが9 mm増すと枚数が100枚増える

・左のような図をかき、小学校での学習を思い出させる。

・表がつかれない生徒には、わかるところを埋めてみるように勧める。

(例)  $x = 9$  のとき  
 $y = 100$

・紙の枚数は、紙の厚みに比例することを確認する。

## 2) 改訂指導案の方針

研究授業、研究協議を踏まえて次のように改訂指導案の作成の方針を立てた。

- ・  $100/9$  の数値を約11と考えて計算したり、小数点以下のことにこだわり問題解決に至らない生徒がいたので、もっと扱いやすい数値に変える。
- ・ 数直線を使った問題解決の仕方は、生徒からは出なかった。表を利用した授業展開を工夫する。
- ・ 小学校で学習した割合の考え方を確認し、比例の意味を理解させる。さらに、比例定数の意味についても深く理解できるような授業展開にする。
- ・ 1あたり量をさらに意識させながら  $x, y$  の関係や式や表を見ることが出来る授業展開にする。

## ② 改訂指導案と授業の実際

### 1) 第1学年第6時改訂指導案

本時のねらい

- ・ともなって変わる2つの数量から、関数関係を見出し、比例の関係の理解を深める。
- ・割合や比の問題に関数の考え方を使って考察し、問題解決を図る。
- ・関数関係を表や式を使って表し、比例定数の意味を理解する。

学 習 活 動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点																
課題場面を提示する。	<p><b>課題場面</b>                      (500枚の)紙の束を見せる。</p>	500枚の紙の束を実際に生徒に見せる。																
枚数を予想する。	(1) 何枚あると思いますか。 ア 500枚 イ 300枚 ウ 100枚																	
実物から枚数とそれを確認する方法を予想する。	(2) 何がわかれば紙の枚数がわかりますか。 ア 紙の厚さ イ 紙の枚数 ウ 紙の重さ エ 紙の体積	生徒の実態に合わせて、厚さか重さかのどちらかを教師が選択する。																
実測する。	(3) 実物でその厚さが40mm、枚数が500枚であることを確認する。	実物を用いて代表生徒に厚さを読みとらせる。																
課題を提示する。	<p><b>課題1</b>                      500枚の紙の厚さは40mmです。紙の枚数を調べるとき、実際に数えなくても紙の厚さ(重さ)を調べれば紙の枚数がわかります。他のいろいろな紙の枚数と紙の厚さ(重さ)の関係を表を書いて調べてみよう。</p>	(※1)プリントを配布する。																
(注) 以下の指導案は(2)アの生徒の反応を受けての展開である。																		
表をつくる。	(4) 表を書いてみよう。	紙の枚数と紙の厚さのどちらを上段にするかは、生徒に自由に考えさせる。																
	ア <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>500</td><td>100</td></tr> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>40</td><td>8</td></tr> </table>	紙の枚数(枚)	500	100	紙の厚さ(mm)	40	8											
紙の枚数(枚)	500	100																
紙の厚さ(mm)	40	8																
	イ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>500</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td></tr> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>40</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td></tr> </table>	紙の枚数(枚)	500	100	200	300	400	紙の厚さ(mm)	40	8	16	24	32					
紙の枚数(枚)	500	100	200	300	400													
紙の厚さ(mm)	40	8	16	24	32													
	ウ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>500</td><td>100</td><td>1</td></tr> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>40</td><td>8</td><td>0.08</td></tr> </table>	紙の枚数(枚)	500	100	1	紙の厚さ(mm)	40	8	0.08									
紙の枚数(枚)	500	100	1															
紙の厚さ(mm)	40	8	0.08															
	エ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td></tr> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td><td>40</td></tr> </table>	紙の枚数(枚)	100	200	300	400	500	紙の厚さ(mm)	8	16	24	32	40					
紙の枚数(枚)	100	200	300	400	500													
紙の厚さ(mm)	8	16	24	32	40													
	オ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>40</td><td>8</td></tr> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>500</td><td>100</td></tr> </table>	紙の厚さ(mm)	40	8	紙の枚数(枚)	500	100											
紙の厚さ(mm)	40	8																
紙の枚数(枚)	500	100																
	カ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>40</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td></tr> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>500</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td></tr> </table>	紙の厚さ(mm)	40	8	16	24	32	紙の枚数(枚)	500	100	200	300	400					
紙の厚さ(mm)	40	8	16	24	32													
紙の枚数(枚)	500	100	200	300	400													
	キ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>40</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>500</td><td>100</td><td>12.5</td></tr> </table>	紙の厚さ(mm)	40	8	1	紙の枚数(枚)	500	100	12.5									
紙の厚さ(mm)	40	8	1															
紙の枚数(枚)	500	100	12.5															
	ク <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td><td>40</td></tr> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td></tr> </table>	紙の厚さ(mm)	8	16	24	32	40	紙の枚数(枚)	100	200	300	400	500					
紙の厚さ(mm)	8	16	24	32	40													
紙の枚数(枚)	100	200	300	400	500													
	ケ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>紙の厚さ(mm)</td><td>0</td><td>1</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td><td>40</td></tr> <tr><td>紙の枚数(枚)</td><td>0</td><td>12.5</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td></tr> </table>	紙の厚さ(mm)	0	1	8	16	24	32	40	紙の枚数(枚)	0	12.5	100	200	300	400	500	
紙の厚さ(mm)	0	1	8	16	24	32	40											
紙の枚数(枚)	0	12.5	100	200	300	400	500											

2つの数量の関係を  
確認する。

比例である根拠を  
考える。

比例定数の意味を  
考える。

課題を提示する。

課題を解決する。

比例定数の意味を  
まとめる。

(5) 紙の厚さと紙の枚数はどんな関係になっているので  
しょうか。

ア 比例している。

イ 厚さが倍になると枚数も倍になる。

(6) どうして比例しているとわかるのですか。

ア 厚さが2倍、3倍になると枚数も2倍、3倍に  
なっているから。

イ 紙の厚さを  $x$  mm としたときの紙の枚数を  $y$  枚と  
すると、

$$y = 12.5x$$

となり、比例の式になるから。

ウ  $100 \div 8, 200 \div 16, 300 \div 24, \dots$  のように、  
( $y$  の値)  $\div$  ( $x$  の値) が一定の値になるから。

(7)  $y = 12.5x$  の「12.5」は、何を表していますか。

ア 1 mm あたりの紙の枚数

イ 厚さが 1 mm 増すごとに増える紙の枚数

ウ  $\frac{100}{8}, \frac{200}{16}, \frac{300}{24}, \dots$  の値

エ 比例定数

課題2

紙の厚さが 8 mm 増えると紙の枚数は何枚増えますか。  
また、紙の厚さが 10 mm 増えると紙の枚数は何枚増えま  
すか。

(8) 紙の枚数を求める。

ア 8 mm  $\dots$  100 枚 1 mm は 12.5 枚だから、  
10 mm  $\dots$   $12.5 \times 10 = 125$  (枚)

イ

紙の厚さ (mm)	0	1	8	16	24	32	40
紙の枚数 (枚)	0	12.5	100	200	300	400	500

$+40 \quad 40 \div 10 = 4$   
 $+8$   
 $+500 \quad 500 \div 4 = 125 \quad +100$

100 枚 125 枚

(9) 式  $y = 12.5x$  の比例定数 12.5 が、何を表している  
かまとめよう。

- 紙の厚さ 1 mm のときの紙の枚数 ( $y$  の値)  $\div$  ( $x$  の値)
- 紙の厚さが 1 mm 増えるときの紙の枚数  
( $y$  の増加量)  $\div$  ( $x$  の増加量)

イで式のみを答え  
た場合は、 $x, y$   
の表す意味を確認  
する。

イの式が出なかつ  
た場合は、 $x, y$   
の意味を与え立式  
させる。

(※2)

$x = 8$  のときの  $y = 100$  と考えてい  
る生徒に対して  
は、どこから 8 mm  
増えている場合な  
のかを問う。

表の中で、紙の厚  
さが 1 mm 増えると  
紙の枚数が 12.5 枚  
増えることを確認  
する。

左の図のように、  
増加量の意味を表  
す矢印を丁寧に板  
書する。

2)改訂指導案の授業記録

◎対象：目黒区立東山中学校1年C組

◎授業実施：平成17年12月16日(水)第6校時

◎指導者：目黒区立東山中学校 斎藤圭祐 教諭

- (1) T：今日はみんなにお見せしたいものがあります。  
 T：(紙の束提示。あける。)  
 P：何枚ありますか？  
 T：何枚だと思う？  
 P：(前に出てきて、包装紙にかいてある文字をよむ。)500セット。
- (2) T：数えないで何枚かわかるにはどうしますか？  
 P：重さをはかる。  
 P：幅をはかる。  
 P：1枚の厚さをはかる。  
 P：それは厳しいから10枚ぐらいをはかる。
- (3) T：では厚さが何センチか確認しに来てください。  
 P：(Tが紙の束に定規をあてる。それをよむ。)4cm!  
 T：(紙の束に定規をあてた写真をみんなに見せる。)4cmですね。  
 T：(プリント配布。)
- (4) T：課題1を読んでください。( )には500, 40が入ります。  
 P：(読む。)  
 T：他のいろいろな紙の枚数と紙の厚さの関係を、表をかいて調べてみましょうとあるね。下に表があるでしょ。  
 P：先生、比例？  
 P：x何にするの？  
 P：紙の枚数。  
 T：それは自分で決めてごらん。x、yじゃなくても言葉でもいいよ。( )の中は何入れる？  
 P：x、y。  
 T：いろいろな紙の枚数と厚さの関係を考えてみて、表をつくってください。  
 P：(表をうめる。)  
 T：前に出てきて表をかいてください。

P <sub>1</sub> ：	枚数(枚)	0	500	1000	1500							
	厚さ(mm)	0	40	80	120							
P <sub>2</sub> ：	枚数(枚)	0	1	2	...	500	501	...				
	厚さ(mm)	0	0.08	0.16	...	40	40.08	...				
P <sub>3</sub> ：	枚数(枚)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
	厚さ(mm)	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
P <sub>4</sub> ：	厚さ(mm)	1	2	3	4	...	40	...	400			
	枚数(枚)	12.5	25	37.5	50	...	500	...	5000			



T : 1分見て、自分の表と同じものはありますか？

T : (4つの表の値をみんなで確認する。)

(5) T : 紙の枚数と紙の厚さはどんな関係ですか？

P : 比例。

T : 他の関係は？

P : …。

(6) T : じゃあなんで比例ってわかるの？教えて。

P : 上が2倍、3倍になると下も2倍、3倍になるから。

T : この表のどこが2倍、3倍になっているの？

P<sub>1</sub> :

枚数(枚)	0	500	1000	1500
厚さ(mm)	0	40	80	120

Diagram showing relationships between values in the table:  
- From 500 to 1000:  $\times 2$   
- From 1000 to 1500:  $\times 3$   
- From 40 to 80:  $\times 2$   
- From 80 to 120:  $\times 3$

T : それ以外はどう？

P : (P<sub>3</sub>の表を見ながら)50から100で2倍、4から8で2倍。50から500で10倍、4から40で10倍。だから比例している。

T : これ以外に比例っていえる理由ある？

板書

P :  $y = a x$ 。

T : aって何？

P : 比例定数。

T : aはいくつになる？

P : 50。

P : 12.5。

P : 人によって違うと思う。

T : みんな、xを何にして、yを何にする？

P : 枚数をxにして、厚さをyにする。

T : そしたらどうなるかな？

P : aの答えは4つある。それぞれの表から出てくる。

T : そっか、みんな違うのか。

比例…枚数が2倍、3倍になると  
厚さも2倍、3倍になる。

(7) P :  $4 \div 50 = \frac{2}{25}$

T :  $\frac{2}{25}$  って何表しているの？

P : 1枚のときの厚さ。12.5！

T : ほんと？小数にすると？ $4 \div 50$ で…0.08。これが1枚あたりに厚さになるね。

だから  $y = \frac{2}{25} x$

T : 今度は厚さをxにして、枚数をyにしてみたら？

P : こっちの方がやりやすそう。

T :  $y = 12.5x$ 。aにはどういう値がくると思う？

P : 1mmあたりの枚数。

T : 1mmあたりの枚数が12.5枚。

(8) T : xとyを何で表したかによって、式が違ってきました。ではプリントの右側に課題2がありません。紙の厚さが8mm増えると、紙の枚は何枚増えるでしょう。また、紙の厚さが10mm増えると紙の枚数は何枚増えるでしょう。自分で考えてみて。

板書 厚さ $x$ mm、枚数 $y$ 枚 $y = 12.5x$ 1mmあたりの枚数
--

P : 黒板の表に答えがあるよ。

P : (課題2やる。)

T : 紙の厚さが8mm増えると、紙の枚数は何枚増えるかはどんな考え方をしましたか？

P : (P<sub>4</sub>の表を使い) xが2から4で2倍。yも25から50で2倍。この考え方で同じようにして、xの4を2倍して8。yの50を2倍して100。だから100枚。

T : 紙の厚さが10mm増えた方はどう考えた？

P : 8mmで100枚がわかったから、それに25を足した。

T : その25ってどこからきてるの？

P : (P<sub>4</sub>の表のyの値25を指して) ここ。

T : (右の表の増加を確認しながら説明)

枚数(枚)	1	2	3	4	...	8	10
厚さ(mm)	12.5	25	37.5	50	...	100	125

$\xrightarrow{\times 2}$      $\xrightarrow{\times 2}$      $\xrightarrow{+2}$   
 $\xleftarrow{\times 2}$      $\xleftarrow{\times 2}$      $\xleftarrow{+2}$

厚さが2mm増えたら、枚数は25枚増える。表の他のところはどう？

P :

x	2	4
y	25	50

$\xrightarrow{+2}$   
 $\xleftarrow{+25}$

T : 別の言い方をすると、2mm増えたら25枚増える。1mm増えたら？

P : 12.5増える。

T : (P<sub>4</sub>の表のxの値が1から2で確認) 他でもそうなる？

T :  $y = 12.5x$ の12.5は何を表しているかということ、1mmあたりの枚数は12.5枚でもあり、1mmのとき12.5枚でもあり、。

(表の縦の関係を意識させ)ここから12.5を出すにはどうしたらいいのかな？

P :  $25 \div 2$

T : (表のいろんな値を指し)ここでもそれが成り立つかな？

T : (紙の枚数)  $\div$  (紙の厚さ) = 12.5でもあります。

T : 比例例数aの意味は1mmあたりの紙の枚数だったり、1mm増えたときの増える紙の枚数だったり、(紙の枚数)  $\div$  (紙の厚さ) だったりします。

### 3) 研究協議

- i) 授業記録(1)～(2)までの流れがスムーズだった。課題提示から生徒の課題把握までの流れがよかった。
- ii) 「500枚で45mm」のときと比較すると、「500枚で40mm」は扱いやすい数値であった。そのため、多くの生徒が表を作ることができた。
- iii) 表の作成の際、上段に紙の枚数、下段に紙の厚さとする生徒が多かった。その理由としては、配布したワークシートに、「この紙( )枚の厚さは( )mmです。」と書かれていたからではないかと考えられる。設問の仕方を逆にしてみたら生徒の反応に変化があるか確かめてみたい。
- iv) 表から比例ということを読み取る生徒が多かった。式から比例を考えるよりも表からの方が読み取りやすいと考えられる。
- v) 授業記録(8)での生徒とのやり取りはとても大切であり、ここに時間をかけるためには、授業記録(5)～(7)の流れに多くの時間をとられないようにするとよい。
- vi) 課題2の「紙の厚さが8mm増えると・・・、10mm増えると・・・」の「8」や「10」という数値も生徒にとっては、考えやすかった。
- vii) 多くの生徒は表を用いて増加量に着目していたが、 $y=12.5x$ での $x$ の値に「8」や「10」を代入していた生徒もいた。それらの生徒に対しては「どこから8mm増えたのかな」と追発問するとよかった。また課題2において、右の図のように、黒板に張ってある写真に増えた部分を書き込むことで、増加量を意識させることができる。

### ③ 新改訂指導案について (研究授業で使用したプリントの課題)

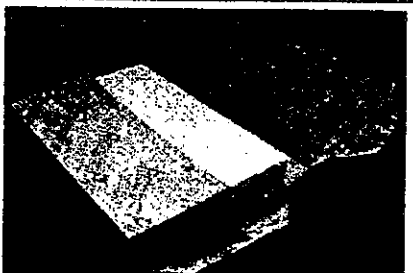
研究協議をふまえて、指導案のほとんどは改訂せず、次の2点について、改訂を行う。

課題1

この紙( )枚の厚さは( )mmです。

紙の枚数を調えるとき、実際に数えなくても、厚さを調べれば紙の枚数がわかります。

他のいろいろな紙の枚数と紙の厚さの関係を、表をかくて調べてみましょう。



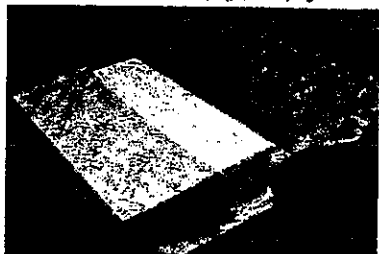
※1 配布プリントは、右のように変える。

課題1

厚さが( )mmのこの紙は( )枚です。

この紙の枚数を調えるとき、実際に数えなくても、厚さを調べれば紙の枚数がわかります。

この紙の枚数と厚さの関係を、表をかくて調べてみましょう。



※2 課題2の指導において、紙の厚さが8mm増えることについて、増加量を意識させるような発問をする。

改訂指導案(P15)の指導上の留意点に付記して示した。

### 3. 今後の課題

本委員会は、一人ひとりの生徒の関数概念の理解が、どのように高まり深まるかを、授業実践を通して考察してきた。具体的には、授業の中で、さまざまな学習内容をどのように指導すれば、生徒の関数概念が高まるかについて、実証的に検討している。

今後、次の点について研究を進めていこうと考えている。

- (1) 「変化の割合」における各学年の指導を検証し、適切な指導のあり方を考察していく。
- (2) 評価問題を実施、考察し、指導計画、指導案、評価規準について見直していく。
- (3) 各学年において、「数学的な見方や考え方」「関心・意欲・態度」を一層伸ばすような課題を設定した授業を行い、指導のあり方や適切な課題について検討していく。
- (4) 関数の領域以外や他教科において、関数的な考え方を伸ばすのにふさわしい指導場面について検討していく。そして、それらとの関連を明らかにし、より適切な関数指導を追求する。

#### [参考・引用文献]

- (1) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会  
「1次関数における『変化の割合』の指導について」  
〈日数教（埼玉）大会発表資料〉 2001(H13)年  
「1次関数における『変化の割合』の指導について」  
〈日数教（兵庫）大会発表資料〉 2002(H14)年  
「『変化の割合』の指導について」  
〈日数教（愛知）大会発表資料〉 2003(H15)年  
「『変化の割合』の指導について」  
〈日数教（鹿児島）大会発表資料〉 2004(H16)年  
「『変化の割合』の指導について」  
〈日数教（長野）大会発表資料〉 2005(H17)年
- (2) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会  
「中学校関数指導における評価について」の第2学年・評価問題(その1)の8番の類似問題  
〈日数教（東京）大会発表資料〉 1995(H7)年
- (3) 磯田正美「第12回 国際調査PISAの結果から一問題と調査枠組みを中心に」  
明治図書出版「楽しい算数の授業3月号」 2005.3

#### 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

荒井 幸恵 (足立区立蒲原中学校)	井出 宇郎 (世田谷区立砦中学校)
岩木敬二郎 (元板橋区立中台中学校)	遠藤 國雄 (元板橋区立向原中学校)
風間喜美江 (江東区立深川第四中学校)	小林 博 (調布市立第八中学校)
近藤 和夫 (稲城市教育委員会)	斎藤 圭祐 (目黒区立東山中学校)
茂田 千穂 (葛飾区立本田中学校)	鈴木 大輔 (青ヶ島村立青ヶ島中学校)
須藤 哲夫 (元品川区立伊藤中学校)	関 富美雄 (江戸川区立松江第二中学校)
高村 真彦 (荒川区立第九中学校)	塚本 桂子 (大田区立東調布中学校)
橋爪 昭男 (東京都教育委員会)	半田 進 (早稲田大学教育学部)
村田 弘恵 (足立区立第七中学校)	山本 恵悟 (足立区立蒲原中学校)
吉田 直樹 (中野区立北中野中学校)	吉田 裕行 (世田谷区立砦中学校)