

変化の割合と学習段階

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

目次

	ページ
1. 研究のねらいと方向	
(1) 「変化の割合」の概念を育成するための指導	1～ 3
(2) 研究のねらいと方向	3
2. 研究の内容	
(1) 調査問題とそのねらい	4～ 5
(2) 調査対象と調査時期、調査時間	5
(3) 調査結果と考察	5～10
(4) 調査結果から考える改善に向けての指導の可能性	10
3. 今後の課題	11
参考・引用文献	11

1. 研究のねらいと方向

(1) 「変化の割合」の概念を育成するための指導

本研究は、「変化の割合」の意味の理解の指導やその概念の育成をねらいとするものである。

これまで、本委員会では授業研究を通して関数指導の実際を考察してきた。長年の研究の成果⁽¹⁾により、「変化の割合」の指導を以下のようにとらえ、提案している。

第2学年の関数の「変化の割合」の意味、つまり $y = ax + b$ の「a」の意味が理解されていないことが多い。本委員会では、この実態を受けて、これまで第2学年の指導の改善を行ってきた。この改善によって、「a」の意味の理解はなされてはきたが、中学校3年間の関数指導を考えると、この意味は深く、また第3学年や高校へのつながりも大きい。したがって、第1学年からこのことを意識しての指導を考えることが必要である。各学年の関数の「変化の割合」の概念とその指導は、次のような流れで指導することを提案する。

小学校 (割合) = (比べる量) ÷ (もとにする量) (*)

中学校第1学年 比例の関係 $y = ax$ において $\frac{y \text{ の値}}{x \text{ の値}} = a$ *

$$\frac{y \text{ の値}}{x \text{ の値}} = a \rightarrow \frac{(y \text{ の値}) - 0}{(x \text{ の値}) - 0} = a \rightarrow \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = a \quad **$$

第2学年 1次関数 $y = ax + b$ において $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = a$

第3学年 関数 $y = ax^2$ において $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$

(*について)

中学校第1学年の教科書では、aの意味に多少ふれてはいるが、指導では積極的に行われてこなかった。特に、(yの値) ÷ (xの値) は小学校で学習した割合と結びつけて学習されてこなかった。そこで、具体的な事象を通して、比例定数aは(yの値) / (xの値) が単位量あたりの大きさを表していることを指導していく。

(**について)

比例のグラフ上で、xが1増えたらyが2増えているなどのことを確認させる程度の指導は多少みられるものの、中学校第1学年で具体的な指導を見ることはほとんどない。具体的な場面で何もやらずに、グラフの形の中でそれを調べることは、生徒にとっては唐突で形式的な指導になっていた。そこで、具体的な事象を通して、比例定

数 a が x が 1 増加するときの y の増加量になっていること、つまり $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ であることを指導する。

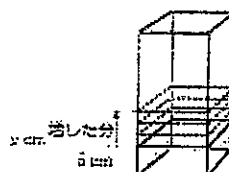
つまり、具体的な場面を通して上記の**の学習内容を導入し、「*→**」の指導を指導計画に位置づけ、指導する。それによって、例えば、中学校第2学年の1次関数の導入で見かける「 $y = (x \text{ に比例する量}) + (\text{一定の量})$ 」について考えるとき、(比例する量)は(単位量あたりの大きさ) $\times x$ になっていることが容易に理解できる。

$$y = (\text{単位量あたりの大きさ}) \times x + (\text{一定の量})$$

∥

$$y = (\text{変化の割合}) \times x + (\text{一定の量})$$

$$y = \begin{array}{l} \text{= 比例する量} \\ ax + b \\ \text{一定の量} \end{array}$$



(2) 研究のねらいと方向

中学校の「変化の割合」のいくつもの指導をみると、生徒たちは計算はできて意味がつかめなかったり、学習した直後はできて時間もともに忘れるなど定着をみることは少ない。

そこで、「変化の割合」の理解や概念の育成を図る指導が必要となってくる。そのために、子どもたちがそれをどうとらえ、どのような理解の状態であるか知り、またどのように変容させられるのかを研究していくことにする。

研究は、次の①～⑤の手順で進める。

- ① 生徒の実態を把握するため、調査問題を実施する。
- ② 指導を考えた学習段階を設置し、①の調査問題の集計を行う。
- ③ ②の分析し、生徒の現状を考察する。
- ④ 指導法を改善する。
- ⑤ ④による生徒の変容を知り、さらなる指導の改善を行う。

今回は、①～③について発表する。

2. 研究の内容

(1) 調査問題とそのねらい

先に述べた『変化の割合の概念を育成するための指導の提案』をもとに、指導を考えた学習段階を踏まえた調査問題を作成した。その調査問題の生徒の反応を整理しながら、学習段階を見直し、集計を行うことにした。

調査問題は、以下の3問である。

調査問題1・2は「変化の割合」の意味がどのように理解されているかを把握するためのものである。調査問題3では問題解決の場面で「変化の割合」を利用することができるかを把握するためのものである。

調査問題1

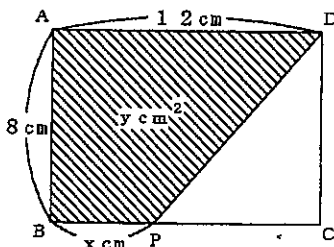
はじめいくらかの水が入っている深さ80cm直方体状の容器があります。
この容器に一定の割合で水を入れていきます。水を入れ始めてからx分後の水面の高さをy cmすると、 $y = 4x + 20$ という関係があります。
次の問いに答えなさい。

- (1) 変化の割合4は何を意味していますか。具体的に答えなさい。
- (2) この式の「20」は何を意味していますか。具体的に答えなさい。

(ねらい) 具体的な事象を背景にもつ関数 $y = ax + b$ の式から、 a や b の意味を理解しているかを知る。特に、 a の意味の具体的な内容をとらえる際、「1あたり量」という意識があるかを把握する。

調査問題2

下の図のような長方形ABCDがあります。点PはBを出発して辺BC上をCまで動きます。BPの長さがx cmのときの四角形ABPDの面積を $y \text{ cm}^2$ とします。点PがBC上のあるところからあるところまで3 cm動くとき、四角形ABPDの面積は何 cm^2 増加しますか。



(ねらい) 具体的な問題解決場面において、変化の割合をどのように見出しているか、その理解の様相を知る。

調査問題3

3点A(-1, 0.6)、B(4, 2.6)、C(10, 5)があります。この3点は同じ直線上の点ですか。あてはまるものに○をつけなさい。また、その理由を答えなさい。

[解答用紙]

ア 3点は同じ直線上の点である

イ 3点は同じ直線上の点ではない

理由

(ねらい) 問題解決の場面で「変化の割合」を利用することができるかを把握する。

(2) 調査対象と実施時期、調査時間

公立中学校5校 第2学年修了前後の生徒342名

調査時期：平成19年2～4月 調査時間：20分

(3) 調査結果と考察

指導を考えた学習段階を想定し、調査問題を作成した。さらに、調査実施後の生徒の反応を整理、集計しながら、学習段階を見直していった。

生徒の反応が、調査問題のねらいである期待する反応であるであれば、「00」「01」のような整理番号「0*」をつけた。誤答は「80」「81」のように「8*」とし、生徒の反応の内容によって順序をつけて整理番号をつけた。無答は「90」とした。

① 調査問題 1 - (1) について

整理番号	生徒の反応	反応率
00	1分あたり量に着目したもの	14.9%
01	1分間に4cm上がる（1あたり量の意識・表現が弱い）	43.6%
10	一定の量で入る水の量（一定の量・割合があいまい）	11.7%
11	増えていく水の量	1.8%
50	グラフの傾き	1.8%
80	$y=ax+b$ の a と x を取り違えている（例：水を入れ始めてから4分後）	10.8%
81	その他の反応	7.3%
90	無答	8.2%

- この調査問題の変化の割合4を、1分あたりの量に着目しているものを「00」「01」と分類し、着目していないものを、つまり x の増加量の意識がないものを「10」「11」と分類した。

「00」1分あたり量に着目した生徒の反応例：

（ア）1分間ごとに増える水面の高さ

（イ）1分間に4cmずつ上がるということ

- 「50」と反応した生徒は、具体的な内容で答えていないので、正答とみなしていない。したがって、「00」と「90」のおよそ真ん中の「50」とした。
- 「80」と反応した生徒は、変化の割合の意味が理解できておらず、「4」の意味を時間ととらえている。
- 「81」の反応例は、「 x 分後の水の高さ」「 x 分後に4cm進むこと」などである。

② 調査問題 1 - (2) について

整理番号	生徒の反応	反応率
00	はじめに入っていた水面の高さ	72.5%
50	切片	1.5%
60	水面の高さ	2.3%
70	$y=ax+b$ の a と b を取り違えている (例: 1分毎に増えていく水の量)	3.8%
80	その他の反応	9.9%
90	無答	9.9%

- ・「50」と反応した生徒は、具体的な内容で答えていないので、正答とみなしていない。
- ・「60」と反応した生徒は、いつの時点の水面の高さかがはっきりとらえられていない。しかし、「4分後の水面の高さ」のように誤答とは考えられないので、「80」とは区別した。
- ・「70」と反応した生徒は、事象の状況把握ができておらず、 $y = ax + b$ の文字の並びだけで誤って判断している。
- ・「80」の反応として、「傾き」「 $80 \div 4 = 20$ 」「4分後の水面の高さ」「 x 分後の水面の高さ」などがある。なお「 $80 \div 4 = 20$ 」と反応した生徒は、 x と y を比例の関係ととらえている。

③ 調査問題 2 について

整理番号	生徒の反応	反応率
00	xの値が●から▲まで増加するときのyの増加量 (●, ▲は条件に合わせて設定、●=0は除く)	9.6%
01	(xの1あたり量に対応したyの増加量)×3	7.9%
02	xの値が0から3まで増加するときのyの増加量	13.2%
10	「00」と同じだが、計算ミス	1.5%
11	「01」と同じだが、計算ミス	0.9%
12	「02」と同じだが、計算ミス	1.5%
13	「02」と同じだが、それぞれのyの値だけを求めている	1.2%
60	x=3のときのyの値60	4.4%
61	「60」と同じだが、計算ミス	0.3%
80	その他	24.3%
90	無答	35.4%

大会特集号では、生徒の反応の考え方で分類し、次のように示している。

「ア」は、「00」+「10」 「イ」は、「01」+「11」
「ウ」は、「02」+「12」+「13」 「エ」は、「60」+「61」
「オ」は、「80」

反応率は、調査校3校分を示してあり、上記の反応率は調査校5校分のものを示してある。

- ・「変化の割合」ができていない生徒（「00」「01」「11」）の反応率はかなり低い。
- ・「00」と反応した生徒は、xの値がどこからどれだけ増加しても、変化の割合が一定であることを理解している。
- ・「01」「11」と反応した生徒は、 $y = ax + b$ のaの値が、xの1あたり量に対応するyの増加量を理解している。
- ・「02」「12」「13」と反応した生徒は、任意区間ではなくxの値が0から3まで増加するときのyの増加量を考えていたと判断した。このような考えと判断した生徒は、15.9%で、他の反応より多い。
- ・「60」「61」と反応した生徒は、xの値に対応するyの値を考えている。ここでの問題は、具体的な事象で考えさせていたため4.7%と少ないが、式のみが与えられていて、xの増加量に対するyの増加量を求めさせる問題では、過去の調査で「60」「61」のような反応が多くみられた。
- ・「80」と反応した生徒は、与えられた数値の意味をとらえることができずただ計算している。

④ 調査問題3について

整理番号	生徒の反応	反応率
00	変化の割合に着目	7.0%
01	2点で直線の式を求め、残りの1点はその直線上にあるか確かめる	5.8%
02	表にして1次関数の式を求める (3点を表の中に入れ、変化の割合が一定)	0.3%
03	2組の2点で式を求め、それらが一致しているか調べる	2.6%
10	途中で終わっている(表でx, yの増加量を調べている)	0.3%
11	表でxの増加量を出した	0.3%
20	1.3点は直線でない(変化の割合を計算したが間違った)	7.3%
21	1.3点は直線でない(2点で式を求め、残りの1点を代入するが間違った)	3.8%
23	1.3点は直線でない(2組の2点で2つの式を求めたが一致しない)	1.8%
40	1.3点は直線でない (x, yの増加量を考えたが、変化の割合として考えていない)	0.9%
41	おおまかなグラフをかき、判断する	0.6%
50	7.3点は直線にある(理由がずれている)	5.3%
51	7.3点は直線にある(理由なし)	4.7%
80	1.3点は直線でない(理由がずれている)	23.4%
81	1.3点は直線でない(理由なし)	9.9%
82	その他	0.3%
90	無答	25.7%

- ・「変化の割合」に着目した生徒の反応は「00」「02」「20」で、反応率は14.6%である。
- ・「00」と反応した生徒は、表をかき、変化の割合を求め、一直線と判断した者が多い。

生徒の反応例：

x	-1	4	10	xが1増加すると、 yは0.4増加する。
y	0.6	2.6	5	

- ・「02」と反応した生徒は下の表をかき、xが-1～4ではxが1ずつ増加するとき、yの増加量は0.4と判断した。さらに、xが4～10でもそれが成り立っているかどうか確認する姿勢をもっている。

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.6	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3	3.4	3.8	4.2	4.6	

- ・「10」「11」「40」と反応した生徒は、 x 、 y の増加量を考えているが、 x が1増加するときの y の増加量までは考えていない。
- ・「41」と反応した生徒は、点のおおまかな位置を記して判断した。このような姿勢は関数を大局的な視点でとらえようとしている。答えを導くきっかけをつかむことでは重要な姿勢であるが、一見同一直線上にあると判断しても、細かな部分まで調べるという「00」～「03」の変化の割合の考えなどをもたせる必要がある。
- ・この問題の解決の仕方は多様である。「変化の割合」の視点の解決は、表をかいている生徒が多い。

(4) 調査結果から考える改善に向けての指導の可能性

本委員会はこれまで評価等でいくつかの調査をしてきた。評価と指導の改善を行ってきたが、個々の改善はバラバラであった。

今回、「変化の割合」という視点で中学校3年間の関数指導を考えるために、3ページにある①～⑤の研究の方針をもとに調査を行った。

この調査の生徒の反応や指導の提案をもとに、「変化の割合」の理解や概念について質的な移行をするために、以下のような指導が考えられる。

- 無答率が多いことは、何をしたいかわからないという生徒が多いということである。そのような問題解決の手段をもっていない生徒に対しては、関数のどの授業でも、考えるきっかけとして、まず表をかき、2変数の関係に着目させる指導が大切である。
- 「変化の割合」が理解できている生徒はかなり少ない。比例では「 $(y$ の値) \div (x の値)」 「0からの区間」の学習が中心である。しかし、そのような段階から脱却できない生徒がいる。1次関数や関数 $y = ax^2$ などにおける「変化の割合」の理解や利用は、区間を意識することが大切で、任意の区間への質的な移行が必要である。
- x や y の変化や対応を意識した指導を行っていく。
- 「変化の割合」を調べるために、いろいろな場面で区間をとらせ、次の段階をふんでいく。
 - 指導の第1段階・・・ x が1増加
 - 指導の第2段階・・・ x が整数値の増加
 - 指導の第3段階・・・ x が小数値(分数値)増加
- さらに、有限個の区間において「変化の割合」を調べる態度を育てるような指導を行う。

3. 今後の課題

本委員会は、一人ひとりの生徒の関数概念の理解が、どのように高まり深まるかを、授業実践を通して考察している。具体的には、授業の中で、さまざまな学習内容をどのように指導すれば、生徒の関数概念が高まるかについて、実証的に検討している。

今後、次の点について研究を進めていく。

- ① よりよい調査問題を検討し、実施する。
- ② 今回の調査と①とを比較する。
- ③ 調査結果を基に、学習段階をさらに考察する。
- ④ 指導法を見出し、改善する。
- ⑤ ④による生徒の変容を知り、さらなる指導の改善を行う。

[参考・引用文献]

- (1) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会
『変化の割合』の指導について
〈日数教（東京）大会発表資料〉 2006(H18)年
- (2) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会
「1次関数における『変化の割合』の指導について」
〈日数教（埼玉）大会発表資料〉 2001(H13)年
「1次関数における『変化の割合』の指導について」
〈日数教（兵庫）大会発表資料〉 2002(H14)年
『変化の割合』の指導について
〈日数教（愛知）大会発表資料〉 2003(H15)年
『変化の割合』の指導について
〈日数教（鹿児島）大会発表資料〉 2004(H16)年
『変化の割合』の指導について
〈日数教（長野）大会発表資料〉 2005(H17)年

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関教委員会

荒井 幸恵 (足立区立蒲原中学校)	井出 宇郎 (世田谷区立砧中学校)
岩木敬二郎 (元板橋区立中台中学校)	遠藤 國雄 (元板橋区立向原中学校)
小高 洋平 (足立区立栗島中学校)	風間喜美江 (江東区立深川第四中学校)
小林 博 (調布市立第八中学校)	近藤 和夫 (世田谷区立桜木中学校)
斎藤 圭祐 (目黒区立東山中学校)	茂田 千穂 (葛飾区立本田中学校)
鈴木 大輔 (江東区立深川第一中学校)	須藤 哲夫 (元品川区立伊藤中学校)
関 富美雄 (江戸川区立松江第二中学校)	高村 真彦 (荒川区立第九中学校)
塚本 桂子 (大田区立東調布中学校)	橋爪 昭男 (東京都教育委員会)
半田 進 (東北福祉大学)	村田 弘恵 (足立区立第七中学校)
山本 恵悟 (足立区立蒲原中学校)	吉田 直樹 (中野区立北中野中学校)
吉田 裕行 (世田谷区立砧中学校)	